

Programa de Estudio  
3° o 4° Medio  
Formación Diferenciada  
Matemática

Geometría 3D

MINISTERIO DE EDUCACIÓN  
GOBIERNO DE CHILE



v  
e  
r  
s  
i  
ó  
n  
-  
w  
e  
b



**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y  
ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN.  
ESTAS ACTIVIDADES ESTÁN  
ORGANIZADAS EN 4 UNIDADES,  
CADA UNIDAD TIENE CUATRO  
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJES Y  
UNA ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN.**

**Querida comunidad educativa:**

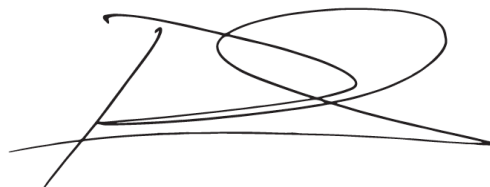
Me es grato saludarles y dirigirme a ustedes para poner en sus manos los Programas de Estudio de las 46 asignaturas del currículum ajustado a las nuevas Bases Curriculares de 3° y 4° año de enseñanza media (Decreto Supremo N°193 de 2019), que inició su vigencia el presente año para 3° medio y el año 2021 para 4° medio, o simultáneamente en ambos niveles si el colegio así lo decidió.

El presente año ha sido particularmente difícil por la situación mundial de pandemia por Coronavirus y el Ministerio de Educación no ha descansado en su afán de entregar herramientas de apoyo para que los estudiantes de Chile se conviertan en ciudadanos que desarrollen la empatía y el respeto, la autonomía y la proactividad, la capacidad para perseverar en torno a metas y, especialmente, la responsabilidad por las propias acciones y decisiones con conciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

Estos Programas de Estudio han sido elaborados por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación y presentan una propuesta pedagógica y didáctica que apoya el proceso de gestión de los establecimientos educacionales, además de ser una invitación a las comunidades educativas para enfrentar el desafío de preparación, estudio y compromiso con la vocación formadora y con las expectativas de aprendizaje que pueden lograr nuestros estudiantes.

Nos sentimos orgullosos de poner a disposición de los jóvenes de Chile un currículum acorde a los tiempos actuales y que permitirá formar personas integrales y ciudadanos autónomos, críticos y responsables, que desarrollen las habilidades necesarias para seguir aprendiendo a lo largo de sus vidas y que estarán preparados para ser un aporte a la sociedad.

Les saluda cordialmente,



Raúl Figueroa S.  
Ministro de Educación

**Programa de Estudio Geometría 3D de 3° y 4° medio**  
**Formación Diferenciada**

Aprobado por Decreto Exento N°496 del 15 de junio de 2020.

Equipo de Desarrollo Curricular  
Unidad de Currículum y Evaluación  
Ministerio de Educación 2021

**IMPORTANTE**

En el presente documento, se utilizan de manera inclusiva términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor”, “el niño”, “el compañero” y sus respectivos plurales (así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo) para referirse a hombres y mujeres.

Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo aludir conjuntamente a ambos sexos en el idioma español, salvo usando “o/a”, “los/las” y otras similares, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.



# Índice

Presentación.....	5
Nociones básicas .....	6
Consideraciones generales.....	11
Orientaciones para planificar .....	16
Orientaciones para evaluar los aprendizajes .....	17
Estructura del programa .....	19
Geometría 3D .....	21
Propósitos Formativos.....	21
Enfoque de las asignaturas de Matemática .....	21
Orientaciones para el docente .....	24
Organización curricular.....	27
Unidad 1: Representación vectorial de situaciones y fenómenos .....	32
Actividad 1: Representar situaciones con vectores.....	33
Actividad 2: Aplicar homotecias en obras de arte.....	41
Actividad 3: Transitar de 2D a 3D por medio de ecuaciones y vectores .....	47
Actividad 4: Las ecuaciones vectoriales y los fenómenos de la naturaleza.....	52
Actividad de Evaluación.....	57
Unidad 2: Rectas y planos en el espacio .....	63
Actividad 1: De la geometría plana a la geometría espacial.....	64
Actividad 2: Rectas y planos en el espacio .....	72
Actividad 3: Determinar la intersección de rectas con planos y de planos con planos .....	82
Actividad 4: Resolver problemas que involucran mediciones en el sistema de coordenadas 3D .....	93
Actividad de Evaluación.....	99
Unidad 3: Generación de cuerpos utilizando patrones geométricos .....	107
Actividad 1: Trasladar y rotar figuras 2D para generar figuras 3D .....	108
Actividad 2: Rotar y trasladar formas en el espacio .....	118
Actividad 3: No todo se traslada con vectores desde el origen .....	122
Actividad 4: Rotar en el espacio .....	127
Actividad de evaluación.....	132
Unidad 4: Los objetos con sus caras y perspectivas.....	137
Actividad 1: Representar formas 3D en dos dimensiones.....	138
Actividad 2: Representar cortes y secciones en el diseño y la creación de diversos objetos .....	147
Actividad 3: Representar proyecciones en el plano .....	154

Actividad 4: Diseñar y construir un objeto 3D.....	162
Actividad de Evaluación.....	168
Proyecto Interdisciplinario.....	173
Manual de orientación.....	173
Proyecto: Creando espacios públicos para la comunidad.....	177
Bibliografía.....	180
Anexos.....	182

# Presentación

Las Bases Curriculares establecen Objetivos de Aprendizaje (OA) que definen los desempeños que se espera que todos los estudiantes logren en cada asignatura, módulo y nivel de enseñanza. Estos objetivos integran habilidades, conocimientos y actitudes que se consideran relevantes para que los jóvenes alcancen un desarrollo armónico e integral que les permita enfrentar su futuro con las herramientas necesarias y participar de manera activa y responsable en la sociedad.

Las Bases Curriculares son flexibles para adaptarse a las diversas realidades educativas que se derivan de los distintos contextos sociales, económicos, territoriales y religiosos de nuestro país. Estas múltiples realidades dan origen a diferentes aproximaciones curriculares, didácticas, metodológicas y organizacionales, que se expresan en el desarrollo de distintos proyectos educativos, todos válidos mientras permitan el logro de los Objetivos de Aprendizaje. En este contexto, las Bases Curriculares constituyen el referente base para los establecimientos que deseen elaborar programas propios, y por lo tanto, no corresponde que estas prescriban didácticas específicas que limiten la diversidad de enfoques educacionales que pueden expresarse en los establecimientos de nuestro país.

Para aquellos establecimientos que no han optado por programas propios, el Ministerio de Educación suministra estos Programas de Estudio con el fin de facilitar una óptima implementación de las Bases Curriculares. Estos programas constituyen un complemento totalmente coherente y alineado con las Bases Curriculares y una herramienta para apoyar a los docentes en el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los Programas de Estudio proponen al profesor una organización de los Objetivos de Aprendizaje con relación al tiempo disponible dentro del año escolar, y constituyen una orientación acerca de cómo secuenciar los objetivos y cómo combinarlos para darles una comprensión profunda y transversal. Se trata de una estimación aproximada y de carácter indicativo que puede ser adaptada por los docentes, de acuerdo a la realidad de sus estudiantes y de su establecimiento.

Asimismo, para facilitar al profesor su quehacer en el aula, se sugiere un conjunto de indicadores de evaluación que dan cuenta de los diversos desempeños de comprensión que demuestran que un alumno ha aprendido en profundidad, transitando desde lo más elemental hasta lo más complejo, y que aluden a los procesos cognitivos de orden superior, las comprensiones profundas o las habilidades que se busca desarrollar transversalmente.

Junto con ello, se proporcionan orientaciones didácticas para cada disciplina y una gama amplia y flexible de actividades de aprendizaje y de evaluación que pueden utilizarse como base para nuevas actividades acordes con las diversas realidades de los establecimientos educacionales. Estas actividades se enmarcan en un modelo pedagógico cuyo enfoque es el de la comprensión profunda y significativa, lo que implica establecer posibles conexiones al interior de cada disciplina y también con otras áreas del conocimiento, con el propósito de facilitar el aprendizaje.

Estas actividades de aprendizaje y de evaluación se enriquecen con sugerencias al docente, recomendaciones de recursos didácticos complementarios y bibliografía para profesores y estudiantes.

En síntesis, se entregan estos Programas de Estudio a los establecimientos educacionales como un apoyo para llevar a cabo su labor de enseñanza.

# Nociones básicas

## OBJETIVOS DE APRENDIZAJE COMO INTEGRACIÓN DE CONOCIMIENTOS, HABILIDADES Y ACTITUDES

Los Objetivos de Aprendizaje definen para cada asignatura o módulo los aprendizajes terminales esperables para cada semestre o año escolar. Se refieren a habilidades, actitudes y conocimientos que han sido seleccionados considerando que entreguen a los estudiantes las herramientas necesarias para su desarrollo integral, que les faciliten una comprensión profunda del mundo que habitan, y que despierten en ellos el interés por continuar estudios superiores y desarrollar sus planes de vida y proyectos personales.

En la formulación de los Objetivos de Aprendizaje se relacionan habilidades, conocimientos y actitudes y, por medio de ellos, se pretende plasmar de manera clara y precisa cuáles son los aprendizajes esenciales que el alumno debe lograr. Se conforma así un currículum centrado en el aprendizaje, que declara explícitamente cuál es el foco del quehacer educativo. Se busca que los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto de la sala de clases como en la vida cotidiana.

### CONOCIMIENTOS

Los conocimientos de las asignaturas y módulos corresponden a conceptos, redes de conceptos e información sobre hechos, procesos, procedimientos y operaciones que enriquecen la comprensión de los alumnos sobre los fenómenos que les toca enfrentar. Les permiten relacionarse con el entorno, utilizando nociones complejas y profundas que complementan el saber que han generado por medio del sentido común y la experiencia cotidiana. Se busca que sean esenciales, fundamentales para que los estudiantes construyan nuevos aprendizajes y de alto interés para ellos. Se deben desarrollar de manera integrada con las habilidades, porque son una condición para el progreso de estas y para lograr la comprensión profunda.

### HABILIDADES Y ACTITUDES PARA EL SIGLO XXI

La existencia y el uso de la tecnología en el mundo global, multicultural y en constante cambio, ha determinado nuevos modos de acceso al conocimiento, de aplicación de los aprendizajes y de participación en la sociedad. Estas necesidades exigen competencias particulares, identificadas internacionalmente como Habilidades para el siglo XXI.<sup>1</sup>

Las habilidades para el siglo XXI presentan como foco formativo central la formación integral de los estudiantes dando continuidad a los objetivos de aprendizaje transversales de 1° básico a 2° medio. Como estos, son transversales a todas las asignaturas, y al ser transferibles a otros contextos, se convierten en un aprendizaje para la vida. Se presentan organizadas en torno a cuatro ámbitos: maneras de pensar, maneras de trabajar, herramientas para trabajar y herramientas para vivir en el mundo.

---

<sup>1</sup> El conjunto de habilidades seleccionadas para integrar el currículum de 3° y 4° medio corresponden a una adaptación de distintos modelos (Binkley et al., 2012; Fadel et al., 2016).

## MANERAS DE PENSAR

### Desarrollo de la creatividad y la innovación

Las personas que aprenden a ser creativas poseen habilidades de pensamiento divergente, producción de ideas, fluidez, flexibilidad y originalidad. El pensamiento creativo implica abrirse a diferentes ideas, perspectivas y puntos de vista, ya sea en la exploración personal o en el trabajo en equipo. La enseñanza para la creatividad implica asumir que el pensamiento creativo puede desarrollarse en todas las instancias de aprendizaje y en varios niveles: imitación, variación, combinación, transformación y creación original. Por ello, es importante que los docentes consideren que, para lograr la creación original, es necesario haber desarrollado varias habilidades y que la creatividad también puede enseñarse mediante actividades más acotadas según los diferentes niveles (Fadel et al, 2016).

### Desarrollo del pensamiento crítico

Cuando aprendemos a pensar críticamente, podemos discriminar entre informaciones, declaraciones o argumentos, evaluando su contenido, pertinencia, validez y verosimilitud. El pensamiento crítico permite cuestionar la información, tomar decisiones y emitir juicios, como asimismo reflexionar críticamente acerca de diferentes puntos de vista, tanto de los propios como de los demás, ya sea para defenderlos o contradecirlos sobre la base de evidencias. Contribuye así, además, a la autorreflexión y corrección de errores, y favorece la capacidad de estar abierto a los cambios y de tomar decisiones razonadas. El principal desafío en la enseñanza del pensamiento crítico es la aplicación exitosa de estas habilidades en contextos diferentes de aquellos en que fueron aprendidas (Fadel et al, 2016).

### Desarrollo de la metacognición

El pensamiento metacognitivo se relaciona al concepto de “aprender a aprender”. Se refiere a ser consciente del propio aprendizaje y de los procesos para lograrlo, lo que permite autogestionarlo con autonomía, adaptabilidad y flexibilidad. El proceso de pensar acerca del pensar involucra la reflexión propia sobre la posición actual, fijar los objetivos a futuro, diseñar acciones y estrategias potenciales, monitorear el proceso de aprendizaje y evaluar los resultados. Incluye tanto el conocimiento que se tiene sobre uno mismo como estudiante o pensador, como los factores que influyen en el rendimiento. La reflexión acerca del propio aprendizaje favorece su comunicación, por una parte, y la toma de conciencia de las propias capacidades y debilidades, por otra. Desde esta perspectiva, desarrolla la autoestima, la disciplina, la capacidad de perseverar y la tolerancia a la frustración.

### Desarrollo de Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.
- Pensar con apertura a distintas perspectivas y contextos, asumiendo riesgos y responsabilidades.
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
- Pensar con reflexión propia y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.
- Pensar con conciencia de que los aprendizajes se desarrollan a lo largo de la vida y enriquecen la experiencia.
- Pensar con apertura hacia otros para valorar la comunicación como una forma de relacionarse con diversas personas y culturas, compartiendo ideas que favorezcan el desarrollo de la vida en sociedad.

## MANERAS DE TRABAJAR

### Desarrollo de la comunicación

Aprender a comunicarse ya sea de manera escrita, oral o multimodal, requiere generar estrategias y herramientas que se adecuen a diversas situaciones, propósitos y contextos socioculturales, con el fin de transmitir lo que se desea de manera clara y efectiva. La comunicación permite desarrollar la empatía, la autoconfianza, la valoración de la interculturalidad, así como la adaptabilidad, la creatividad y el rechazo a la discriminación.

### Desarrollo de la colaboración

La colaboración entre personas con diferentes habilidades y perspectivas faculta al grupo para tomar mejores decisiones que las que se tomarían individualmente, permite analizar la realidad desde más ángulos y producir obras más complejas y más completas. Además, el trabajo colaborativo entre pares determina nuevas formas de aprender y de evaluarse a sí mismo y a los demás, lo que permite visibilizar los modos en que se aprende; esto conlleva nuevas maneras de relacionarse en torno al aprendizaje.

La colaboración implica, a su vez, actitudes clave para el aprendizaje en el siglo XXI, como la responsabilidad, la perseverancia, la apertura de mente hacia lo distinto, la aceptación y valoración de las diferencias, la autoestima, la tolerancia a la frustración, el liderazgo y la empatía.

### Desarrollo de Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- Trabajar con empatía y respeto en el contexto de la diversidad, eliminando toda expresión de prejuicio y discriminación.
- Trabajar con autonomía y proactividad en trabajos colaborativos e individuales para llevar a cabo eficazmente proyectos de diversa índole.

## HERRAMIENTAS PARA TRABAJAR

### Desarrollo de la alfabetización digital

Aprender a utilizar la tecnología como herramienta de trabajo implica dominar las posibilidades que ofrece y darle un uso creativo e innovador. La alfabetización digital apunta a la resolución de problemas en el marco de la cultura digital que caracteriza al siglo XXI, aprovechando las herramientas que nos dan la programación, el pensamiento computacional, la robótica e internet, entre otros, para crear contenidos digitales, informarnos y vincularnos con los demás. Promueve la autonomía y el trabajo en equipo, la creatividad, la participación en redes de diversa índole, la motivación por ampliar los propios intereses y horizontes culturales, e implica el uso responsable de la tecnología considerando la ciberseguridad y el autocuidado.

### Desarrollo del uso de la información

Usar bien la información se refiere a la eficacia y eficiencia en la búsqueda, el acceso, el procesamiento, la evaluación crítica, el uso creativo y ético, así como la comunicación de la información por medio de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC). Implica formular preguntas, indagar y generar estrategias para seleccionar, organizar y comunicar la información. Tiene siempre en cuenta, además, tanto los aspectos éticos y legales que la regulan como el respeto a los demás y a su privacidad.

### Desarrollo de Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
- Valorar las TIC como una oportunidad para informarse, investigar, socializar, comunicarse y participar como ciudadano.
- Actuar responsablemente al gestionar el tiempo para llevar a cabo eficazmente los proyectos personales, académicos y laborales.
- Actuar de acuerdo con los principios de la ética en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.

## MANERAS DE VIVIR EN EL MUNDO

### Desarrollo de la ciudadanía local y global

La ciudadanía se refiere a la participación activa del individuo en su contexto, desde una perspectiva política, social, territorial, global, cultural, económica y medioambiental, entre otras dimensiones. La conciencia de ser ciudadano promueve el sentido de pertenencia y la valoración y el ejercicio de los principios democráticos, y también supone asumir sus responsabilidades como ciudadano local y global. En este sentido, ejercitar el respeto a los demás, a su privacidad y a las diferencias valóricas, religiosas y étnicas cobra gran relevancia; se relaciona directamente con una actitud empática, de mentalidad abierta y de adaptabilidad.

### Desarrollo de proyecto de vida y carrera

La construcción y consolidación de un proyecto de vida y de una carrera, oficio u ocupación, requiere conocerse a sí mismo, establecer metas, crear estrategias para conseguirlas, desarrollar la autogestión, actuar con iniciativa y compromiso, ser autónomo para ampliar los aprendizajes, reflexionar críticamente y estar dispuesto a integrar las retroalimentaciones recibidas. Por otra parte, para alcanzar esas metas, se requiere interactuar con los demás de manera flexible, con capacidad para trabajar en equipo, negociar en busca de soluciones y adaptarse a los cambios para poder desenvolverse en distintos roles y contextos. Esto permite el desarrollo de liderazgo, responsabilidad, ejercicio ético del poder y respeto a las diferencias en ideas y valores.

### Desarrollo de la responsabilidad personal y social

La responsabilidad personal consiste en ser conscientes de nuestras acciones y sus consecuencias, cuidar de nosotros mismos de modo integral y respetar los compromisos que adquirimos con los demás, generando confianza en los otros, comunicándonos de una manera asertiva y empática, que acepte los distintos puntos de vista. Asumir la responsabilidad por el bien común participando activamente en el cumplimiento de las necesidades sociales en distintos ámbitos: cultural, político, medioambiental, entre otros.

### Desarrollo de Actitudes

- Perseverar en torno a metas con miras a la construcción de proyectos de vida y al aporte a la sociedad y al país con autodeterminación, autoconfianza y respeto por sí mismo y por los demás.
- Participar asumiendo posturas razonadas en distintos ámbitos: cultural, social, político y medioambiental, entre otros.
- Tomar decisiones democráticas, respetando los derechos humanos, la diversidad y la multiculturalidad.
- Asumir responsabilidad por las propias acciones y decisiones con conciencia de las implicancias que ellas tienen sobre sí mismo y los otros.



# Consideraciones generales

Las consideraciones que se presentan a continuación son relevantes para una óptima implementación de los Programas de Estudio, se vinculan estrechamente con los enfoques curriculares, y permiten abordar de mejor manera los Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares.

## EL ESTUDIANTE DE 3º y 4º MEDIO

La formación en los niveles de 3° y 4° Medio cumple un rol esencial en su carácter de etapa final del ciclo escolar. Habilita al alumno para conducir su propia vida en forma autónoma, plena, libre y responsable, de modo que pueda desarrollar planes de vida y proyectos personales, continuar su proceso educativo formal mediante la educación superior, o incorporarse a la vida laboral.

El perfil de egreso que establece la ley en sus objetivos generales apunta a formar ciudadanos críticos, creativos y reflexivos, activamente participativos, solidarios y responsables, con conciencia de sus deberes y derechos, y respeto por la diversidad de ideas, formas de vida e intereses. También propicia que estén conscientes de sus fortalezas y debilidades, que sean capaces de evaluar los méritos relativos de distintos puntos de vista al enfrentarse a nuevos escenarios, y de fundamentar adecuadamente sus decisiones y convicciones, basados en la ética y la integridad. Asimismo, aspira a que sean personas con gran capacidad para trabajar en equipo e interactuar en contextos socioculturalmente heterogéneos, relacionándose positivamente con otros, cooperando y resolviendo adecuadamente los conflictos.

De esta forma, tomarán buenas decisiones y establecerán compromisos en forma responsable y solidaria, tanto de modo individual como colaborativo, integrando nuevas ideas y reconociendo que las diferencias ayudan a concretar grandes proyectos.

Para lograr este desarrollo en los estudiantes, es necesario que los docentes conozcan los diversos talentos, necesidades, intereses y preferencias de sus estudiantes y promuevan intencionadamente la autonomía de los alumnos y la autorregulación necesaria para que las actividades de este Programa sean instancias significativas para sus desafíos, intereses y proyectos personales.

## APRENDIZAJE PARA LA COMPRESIÓN

La propuesta metodológica de los Programas de Estudio tiene como propósito el aprendizaje para la comprensión. Entendemos la comprensión como la capacidad de usar el conocimiento de manera flexible, lo que permite a los estudiantes pensar y actuar a partir de lo que saben en distintas situaciones y contextos. La comprensión se puede desarrollar generando oportunidades que permitan al alumno ejercitar habilidades como analizar, explicar, resolver problemas, construir argumentos, justificar, extrapolar, entre otras. La aplicación de estas habilidades y del conocimiento a lo largo del proceso de aprendizaje faculta a los estudiantes a profundizar en el conocimiento, que se torna en evidencia de la comprensión.

La elaboración de los Programas de Estudio se ha realizado en el contexto del paradigma constructivista y bajo el fundamento de dos principios esenciales que regulan y miden la efectividad del aprendizaje: el aprendizaje significativo y el aprendizaje profundo.

### ¿Qué entendemos por aprendizaje significativo y profundo?

Un aprendizaje se dice significativo cuando los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del estudiante. Esto se logra gracias a un esfuerzo deliberado del alumno por relacionar los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos y es producto de una implicación afectiva del estudiante; es decir, él quiere aprender aquello que se le presenta, porque lo considera valioso. Para la construcción de este tipo de aprendizaje, se requiere efectuar acciones de mediación en el aula que permitan activar los conocimientos previos y, a su vez, facilitar que dicho aprendizaje adquiera sentido precisamente en la medida en que se integra con otros previamente adquiridos o se relaciona con alguna cuestión o problema que interesa al estudiante.

Un aprendizaje se dice profundo solo si, por un lado, el aprendiz logra dominar, transformar y utilizar los conocimientos adquiridos en la solución de problemas reales y, por otro lado, permanece en el tiempo y se puede transferir a distintos contextos de uso. Para mediar el desarrollo de un aprendizaje de este tipo, es necesario generar escenarios flexibles y graduales que permitan al estudiante usar los conocimientos aplicándolos en situaciones diversas.

### ¿Cómo debe guiar el profesor a sus alumnos para que usen el conocimiento?

El docente debe diseñar actividades de clase desafiantes que induzcan a los estudiantes a aplicar habilidades cognitivas mediante las cuales profundicen en la comprensión de un nuevo conocimiento. Este diseño debe permitir mediar simultáneamente ambos aspectos del aprendizaje, el significativo y el profundo, y asignar al alumno un rol activo dentro del proceso de aprendizaje.

El principio pedagógico constructivista del estudiante activo permite que él desarrolle la capacidad de aprender a aprender. Los alumnos deben llegar a adquirir la autonomía que les permita dirigir sus propios procesos de aprendizaje y convertirse en sus propios mediadores. El concepto clave que surge como herramienta y, a la vez, como propósito de todo proceso de enseñanza-aprendizaje corresponde al pensamiento metacognitivo, entendido como un conjunto de disposiciones mentales de autorregulación que permiten al aprendiz monitorear, planificar y evaluar su propio proceso de aprendizaje.

En esta línea, la formulación de buenas preguntas es una de las herramientas esenciales de mediación para construir un pensamiento profundo.

Cada pregunta hace posible una búsqueda que permite integrar conocimiento y pensamiento; el pensamiento se despliega en sus distintos actos que posibilitan dominar, elaborar y transformar un conocimiento.

## ENFOQUE INTERDISCIPLINARIO Y APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS

La integración disciplinaria permite fortalecer conocimientos y habilidades de pensamiento complejo que faculten la comprensión profunda de ellos. Para lograr esto, es necesario que los docentes incorporen en su planificación instancias destinadas a trabajar en conjunto con otras disciplinas. Las Bases Curriculares plantean el Aprendizaje Basado en Proyectos como metodología para favorecer el trabajo colaborativo y el aprendizaje de resolución de problemas.

Un problema real es interdisciplinario. Por este motivo, en los Programas de Estudio de cada asignatura se integra orientaciones concretas y modelos de proyectos, que facilitarán esta tarea a los docentes y que fomentarán el trabajo y la planificación conjunta de algunas actividades entre profesores de diferentes asignaturas.

Se espera que, en las asignaturas electivas de profundización, el docente destine un tiempo para el trabajo en proyectos interdisciplinarios. Para ello, se incluye un modelo de proyecto interdisciplinario por asignatura de profundización.

Existe una serie de elementos esenciales que son requisitos para que el diseño de un proyecto<sup>2</sup> permita maximizar el aprendizaje y la participación de los estudiantes, de manera que aprendan cómo aplicar el conocimiento al mundo real, cómo utilizarlo para resolver problemas, responder preguntas complejas y crear productos de alta calidad. Dichos elementos son:

- **Conocimiento clave, comprensión y habilidades**

El proyecto se enfoca en profundizar en la comprensión del conocimiento interdisciplinario, ya que permite desarrollar a la vez los Objetivos de Aprendizaje y las habilidades del Siglo XXI que se requieren para realizar el proyecto.

- **Desafío, problema o pregunta**

El proyecto se basa en un problema significativo para resolver o una pregunta para responder, en el nivel adecuado de desafío para los alumnos, que se implementa mediante una pregunta de conducción abierta y atractiva.

- **Indagación sostenida**

El proyecto implica un proceso activo y profundo a lo largo del tiempo, en el que los estudiantes generan preguntas, encuentran y utilizan recursos, hacen preguntas adicionales y desarrollan sus propias respuestas.

- **Autenticidad**

El proyecto tiene un contexto del mundo real, utiliza procesos, herramientas y estándares de calidad del mundo real, tiene un impacto real, ya que creará algo que será utilizado o experimentado por otros, y/o está conectado a las propias preocupaciones, intereses e identidades de los alumnos.

- **Voz y elección del estudiante**

El proyecto permite a los estudiantes tomar algunas decisiones sobre los productos que crean, cómo funcionan y cómo usan su tiempo, guiados por el docente y dependiendo de su edad y experiencia de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).

- **Reflexión**

El proyecto brinda oportunidades para que los alumnos reflexionen sobre qué y cómo están aprendiendo, y sobre el diseño y la implementación del proyecto.

- **Crítica y revisión**

El proyecto incluye procesos de retroalimentación para que los estudiantes den y reciban comentarios sobre su trabajo, con el fin de revisar sus ideas y productos o realizar una investigación adicional.

---

<sup>2</sup> Adaptado de John Larmer, John Mergendoller, Suzie Boss. *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*, (ASCD 2015).

- **Producto público**

El proyecto requiere que los alumnos demuestren lo que aprenden, creando un producto que se presenta u ofrece a personas que se encuentran más allá del aula.

## CIUDADANÍA DIGITAL

Los avances de la automatización, así como el uso extensivo de las herramientas digitales y de la inteligencia artificial, traerán como consecuencia grandes transformaciones y desafíos en el mundo del trabajo, por lo cual los estudiantes deben contar con herramientas necesarias para enfrentarlos. Los Programas de Estudio promueven que los alumnos empleen tecnologías de información para comunicarse y desarrollar un pensamiento computacional, dando cuenta de sus aprendizajes o de sus creaciones y proyectos, y brindan oportunidades para hacer un uso extensivo de ellas y desarrollar capacidades digitales para que aprendan a desenvolverse de manera responsable, informada, segura, ética, libre y participativa, comprendiendo el impacto de las TIC en la vida personal y el entorno.

## CONTEXTUALIZACIÓN CURRICULAR

La contextualización curricular es el proceso de apropiación y desarrollo del currículum en una realidad educativa concreta. Este se lleva a cabo considerando las características particulares del contexto escolar (por ejemplo, el medio en que se sitúa el establecimiento educativo, la cultura, el proyecto educativo institucional de las escuelas y la comunidad escolar, el tipo de formación diferenciada que se imparte –Artística, Humanístico-Científica, Técnico Profesional–, entre otros), lo que posibilita que el proceso educativo adquiera significado para los estudiantes desde sus propias realidades y facilita, así, el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los Programas de Estudio consideran una propuesta de diseño de clases, de actividades y de evaluaciones que pueden modificarse, ajustarse y transferirse a diferentes realidades y contextos.

## ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD Y A LA INCLUSIÓN

En el trabajo pedagógico, es importante que los docentes tomen en cuenta la diversidad entre estudiantes en términos culturales, sociales, étnicos, religiosos, de género, de estilos de aprendizaje y de niveles de conocimiento. Esta diversidad enriquece los escenarios de aprendizaje y está asociada a los siguientes desafíos para los profesores:

- Procurar que los aprendizajes se desarrollen de una manera significativa en relación con el contexto y la realidad de los alumnos.
- Trabajar para que todos alcancen los Objetivos de Aprendizaje señalados en el currículum, acogiendo la diversidad y la inclusión como una oportunidad para desarrollar más y mejores aprendizajes.
- Favorecer y potenciar la diversidad y la inclusión, utilizando el aprendizaje basado en proyectos.
- En el caso de alumnos con necesidades educativas especiales, tanto el conocimiento de los profesores como el apoyo y las recomendaciones de los especialistas que evalúan a dichos estudiantes contribuirán a que todos desarrollen al máximo sus capacidades.
- Generar ambientes de aprendizaje inclusivos, lo que implica que cada estudiante debe sentir seguridad para participar, experimentar y contribuir de forma significativa a la clase. Se recomienda

destacar positivamente las características particulares y rechazar toda forma de discriminación, agresividad o violencia.

- Proveer igualdad de oportunidades, asegurando que los alumnos puedan participar por igual en todas las actividades, evitando asociar el trabajo de aula con estereotipos asociados a género, características físicas o cualquier otro tipo de sesgo que provoque discriminación.
- Utilizar materiales, aplicar estrategias didácticas y desarrollar actividades que se adecuen a las singularidades culturales y étnicas de los estudiantes y a sus intereses.
- Promover un trabajo sistemático, con actividades variadas para diferentes estilos de aprendizaje y con ejercitación abundante, procurando que todos tengan acceso a oportunidades de aprendizaje enriquecidas.

Atender a la diversidad de estudiantes, con sus capacidades, contextos y conocimientos previos, no implica tener expectativas más bajas para algunos de ellos. Por el contrario, hay que reconocer los requerimientos personales de cada alumno para que todos alcancen los propósitos de aprendizaje pretendidos. En este sentido, conviene que, al diseñar el trabajo de cada unidad, el docente considere los tiempos, recursos y métodos necesarios para que cada estudiante logre un aprendizaje de calidad. Mientras más experiencia y conocimientos tengan los profesores sobre su asignatura y las estrategias que promueven un aprendizaje profundo, más herramientas tendrán para tomar decisiones pertinentes y oportunas respecto de las necesidades de sus alumnos. Por esta razón, los Programas de Estudio incluyen numerosos Indicadores de Evaluación, observaciones al docente, sugerencias de actividades y de evaluación, entre otros elementos, para apoyar la gestión curricular y pedagógica responsable de todos los estudiantes.

# Orientaciones para planificar

Existen diversos métodos de planificación, caracterizados por énfasis específicos vinculados al enfoque del que provienen. Como una manera de apoyar el trabajo de los docentes, se propone considerar el diseño para la comprensión, relacionado con plantear cuestionamientos activos a los estudiantes, de manera de motivarlos a poner en práctica sus ideas y nuevos conocimientos. En este sentido, y con el propósito de promover el desarrollo de procesos educativos con foco claro y directo en los aprendizajes, se sugiere utilizar la planificación en reversa (Wiggins y McTigue, 1998). Esta mantiene siempre al centro lo que se espera que aprendan los alumnos durante el proceso educativo, en el marco de la comprensión profunda y significativa. De esta manera, la atención se concentra en lo que se espera que logren, tanto al final del proceso de enseñanza y aprendizaje, como durante su desarrollo.

Para la planificación de clases, se considera tres momentos:

## 1. Identificar el Objetivo de Aprendizaje que se quiere alcanzar

Dicho objetivo responde a la pregunta: ¿qué se espera que aprendan? Y se especifica a partir de los Objetivos de Aprendizaje propuestos en las Bases Curriculares y en relación con los intereses, necesidades y características particulares de los estudiantes.

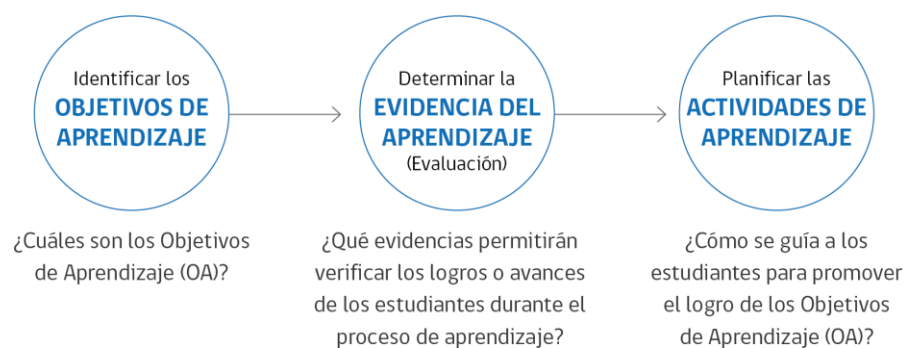
## 2. Determinar evidencias

Teniendo claridad respecto de los aprendizajes que se quiere lograr, hay que preguntarse: ¿qué evidencias permitirán verificar que el conjunto de Objetivos de Aprendizaje se logró? En este sentido, los Indicadores presentados en el Programa resultan de gran ayuda, dado que orientan la toma de decisiones con un sentido formativo.

## 3. Planificar experiencias de aprendizaje

Teniendo en mente los Objetivos de Aprendizajes y la evidencia que ayudará a verificar que se han alcanzado, llega el momento de pensar en las actividades de aprendizaje más apropiadas.

¿Qué experiencias brindarán oportunidades para adquirir los conocimientos, habilidades y actitudes que se necesita? Además de esta elección, es importante verificar que la secuencia de las actividades y estrategias elegidas sean las adecuadas para el logro de los objetivos (Saphier, Haley- Speca y Gower, 2008).



# Orientaciones para evaluar los aprendizajes

La evaluación, como un aspecto intrínseco del proceso de enseñanza-aprendizaje, se plantea en estos programas con un foco pedagógico, al servicio del aprendizaje de los estudiantes. Para que esto ocurra, se plantea recoger evidencias que permitan describir con precisión la diversidad existente en el aula para tomar decisiones pedagógicas y retroalimentar a los alumnos. La evaluación desarrollada con foco pedagógico favorece la motivación de los estudiantes a seguir aprendiendo; asimismo, el desarrollo de la autonomía y la autorregulación potencia la reflexión de los docentes sobre su práctica y facilita la toma de decisiones pedagógicas pertinentes y oportunas que permitan apoyar de mejor manera los aprendizajes.

Para implementar una evaluación con un foco pedagógico, se requiere:

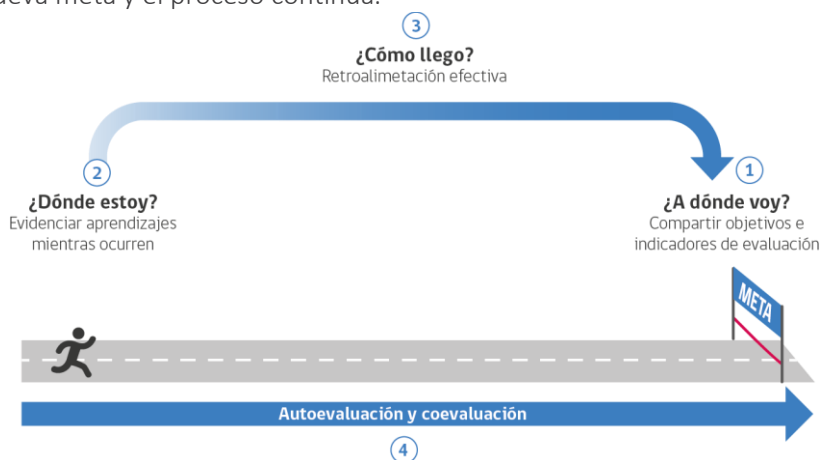
- Diseñar experiencias de evaluación que ayuden a los estudiantes a poner en práctica lo aprendido en situaciones que muestren la relevancia o utilidad de ese aprendizaje.
- Evaluar solamente aquello que los alumnos efectivamente han tenido la oportunidad de aprender mediante las experiencias de aprendizaje mediadas por el profesor.
- Procurar que se utilicen diversas formas de evaluar, que consideren las distintas características, ritmos y formas de aprender, necesidades e intereses de los estudiantes, evitando posibles sesgos y problemas de accesibilidad para ellos.
- Promover que los alumnos tengan una activa participación en los procesos de evaluación; por ejemplo: al elegir temas sobre los cuales les interese realizar una actividad de evaluación o sugerir la forma en que presentarán a otros un producto; participar en proponer los criterios de evaluación; generar experiencias de auto- y coevaluación que les permitan desarrollar su capacidad para reflexionar sobre sus procesos, progresos y logros de aprendizaje.
- Que las evaluaciones sean de la más alta calidad posible; es decir, deben representar de la forma más precisa posible los aprendizajes que se busca evaluar. Además, las evidencias que se levantan y fundamentan las interpretaciones respecto de los procesos, progresos o logros de aprendizajes de los estudiantes, deben ser suficientes como para sostener de forma consistente esas interpretaciones evaluativas.

## EVALUACIÓN

Para certificar los aprendizajes logrados, el profesor puede utilizar diferentes métodos de evaluación sumativa que reflejen los OA. Para esto, se sugiere emplear una variedad de medios y evidencias, como portafolios, registros anecdóticos, proyectos de investigación grupales e individuales, informes, presentaciones y pruebas orales y escritas, entre otros. Los Programas de Estudio proponen un ejemplo de evaluación sumativa por unidad. La forma en que se diseñe este tipo de evaluaciones y el modo en que se registre y comunique la información que se obtiene de ellas (que puede ser con calificaciones) debe permitir que dichas evaluaciones también puedan usarse formativamente para retroalimentar tanto la enseñanza como el aprendizaje.

El uso formativo de la evaluación debiera preponderar en las salas de clases, utilizándose de manera sistemática para reflexionar sobre el aprendizaje y la enseñanza, y para tomar decisiones pedagógicas pertinentes y oportunas que busquen promover el progreso del aprendizaje de todos los estudiantes, considerando la diversidad como un aspecto inherente a todas las aulas.

El proceso de evaluación formativa que se propone implica articular el proceso de enseñanza-aprendizaje en función de responder a las siguientes preguntas: ¿A dónde voy? (qué objetivo de aprendizaje espero lograr), ¿Dónde estoy ahora? (cuán cerca o lejos me encuentro de lograr ese aprendizaje) y ¿Qué estrategia o estrategias pueden ayudarme a llegar a donde tengo que ir? (qué pasos tengo que dar para acercarme a ese aprendizaje). Este proceso continuo de establecer un objetivo de aprendizaje, evaluar los niveles actuales y luego trabajar estratégicamente para reducir la distancia entre los dos, es la esencia de la evaluación formativa. Una vez que se alcanza una meta de aprendizaje, se establece una nueva meta y el proceso continúa.



Para promover la motivación para aprender, el nivel de desafío y el nivel de apoyo deben ser los adecuados –en términos de Vygotsky (1978), estar en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes–, para lo cual se requiere que todas las decisiones que tomen los profesores y los propios alumnos se basen en la información o evidencia sobre el aprendizaje recogidas continuamente (Griffin, 2014; Moss & Brookhart, 2009).



# Estructura del programa

## Propósito de la unidad

Resume el objetivo formativo de la unidad, actúa como una guía para el conjunto de actividades y evaluaciones que se diseñan en cada unidad. Se detalla qué se espera que el estudiante comprenda en la unidad, vinculando los contenidos, las habilidades y las actitudes de forma integrada.

## Objetivos de aprendizaje (OA)

Definen los aprendizajes terminales del año para cada asignatura. En cada unidad se explicitan los objetivos de aprendizaje a trabajar.

## Las actividades de aprendizaje

El diseño de estas actividades se caracteriza fundamentalmente por movilizar conocimientos, habilidades y actitudes de manera integrada que permitan el desarrollo de una comprensión significativa y profunda de los Objetivos de Aprendizaje. Son una guía para que el profesor o la profesora diseñen sus propias actividades de evaluación.

Programa de Estudio Unidad 1

## UNIDAD 1 REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE SITUACIONES Y FENÓMENOS

**PROPÓSITO DE LA UNIDAD**  
En esta unidad los estudiantes utilizan la representación vectorial para describir situaciones y fenómenos de la vida diaria, comunicando sus resultados de manera gráfica y también algebraica. Los estudiantes comprenden y utilizan las propiedades de las operaciones con vectores, aplican este conocimiento en la representación de isometrías y homotecias. Interpretan situaciones mediante ecuaciones vectoriales y profundizan en el uso de los vectores. Algunas preguntas que pueden orientar el desarrollo de esta unidad son: ¿Cómo es posible calcular y representar la dirección del movimiento? ¿Qué implicancias tienen las operaciones y propiedades de los vectores al describir un fenómeno?

**OBJETIVOS DE APRENDIZAJE**

**OA1** Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

**OAa** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OAg** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Programa de Estudio Unidad 1

## ACTIVIDAD 1: Representación de situaciones con vectores

Duración: 12 horas pedagógicas

**PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD**  
Se espera que los jóvenes recuerden lo que hasta ahora han estudiado de vectores y que, a partir de ello, profundicen en algunas de sus características esenciales. Se trabajará el concepto de vector, y operaciones con vectores y escalares y la representación gráfica usando el plano cartesiano en 2D. Los estudiantes pueden utilizar tanto herramientas manuales como digitales para responder y representar la situación cotidiana sobre caminos. Estas actividades buscan ser un punto de partida para vincular el uso habitual de los vectores, presentado de forma sistemática en la vida escolar, con una profundización en el estudio del álgebra, en la educación superior.

**OBJETIVOS DE APRENDIZAJE**

**OA1** Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

**OAg** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

**ACTITUDES**

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

**DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD**  
DESCRIBIR TRAYECTOS DE MANERA PRECISA

Para las siguientes actividades puedes utilizar el software GeoGebra. Por ello crea una cuenta en [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) y genera una carpeta o "Portafolio Digital" para guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados con este programa.

En la ciudad de Valdivia, dentro de sus muchos atractivos turísticos, hay la posibilidad de cruzar caminando el puente Pedro de Valdivia, que conecta la ciudad con la Isla Teja. También se puede navegar por el río Calle en embarcaciones turísticas como veleros, catamaranes, barcasas, entre otras. Caminando, se puede seguir varias rutas y el trayecto seguido dependerá de las condiciones geográficas. Por otro lado, cada vez que se navega por el río, la embarcación se ve afectada por la velocidad con que éste fluye o a la velocidad del viento, por lo que es necesario considerar estos factores al avanzar por el río. Usando vectores, se describirá rutas que se afecten o no por distintas fuerzas a la vez.

### Indicadores de evaluación

Detallan uno o más desempeños observables, medibles, específicos de los estudiantes que permiten evaluar el conjunto de Objetivos de Aprendizaje de la unidad. Son de carácter sugerido, por lo que el docente puede modificarlos o complementarlos.

### Orientaciones para el docente

Son sugerencias respecto de cómo desarrollar mejor una actividad. Generalmente indica fuentes de recursos posibles de adquirir, (vínculos web), material de consulta y lecturas para el docente y estrategias para tratar conceptos habilidades y actitudes.

### Recursos

Se especifican todos los recursos necesarios para el desarrollo de la actividad. Especialmente relevante, dado el enfoque de aprendizaje para la comprensión profunda y el de las Habilidades para el Siglo XXI, es la incorporación de recursos virtuales y de uso de TIC.

### Actividades de evaluación sumativa de la unidad

Son propuestas de evaluaciones de cierre de unidad que contemplan los aprendizajes desarrollados a lo largo de ellas. Mantienen una estructura similar a las actividades de aprendizaje.

Programa de Estudio Unidad 1

## ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN:

#### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

**OA1** Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

**OAA** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OAg** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

#### INDICADORES DE EVALUACIÓN

- Representan y argumentan adiciones y sustracciones de vectores en forma gráfica y algebraica.
- Resuelven problemas que involucran el producto de un vector por un escalar y lo representan en el plano cartesiano.
- Resuelven problemas de isometrías y homotecias, usando vectores y recursos digitales.
- Construir y evaluar estrategias para resolver problemas que involucran el modelo vectorial para representar fenómenos.

#### DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN

A continuación, se muestran algunas actividades que pueden ser usadas como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1, estas pueden ser usadas cada una por sí misma o en conjunto. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y tiempo disponible.

**NIVELES DE LOGRO**

INDICADORES DE EVALUACIÓN	Completamente logrado	Se observan aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Representan y argumentan adiciones y sustracciones de vectores en forma gráfica y algebraica.			
Resuelven problemas que involucran el producto de un vector por un escalar y lo representan en el plano cartesiano.			
Resuelven problemas de isometrías y homotecias, usando vectores y recursos digitales.			

# Geometría 3D

## Propósitos Formativos

La geometría 3D, en sus formulaciones euclidiana, cartesiana y vectorial, permite aplicar diferentes enfoques a la solución de problemas asociados al arte, la arquitectura, el diseño, la construcción, entre otros, en los cuales la creatividad y la innovación son el centro de las aplicaciones de las matemáticas.

Esta asignatura ofrece oportunidades de aprendizaje vinculadas con resolver problemas y modelar situaciones en que intervienen la forma, el tamaño y la posición. Los estudiantes podrán abordar problemas propios de la disciplina, generar propuestas relacionadas con el entorno y familiarizarse con el uso de recursos digitales especialmente diseñados para la geometría.

Geometría 3D comienza con un tratamiento vectorial de las transformaciones en el plano, que el estudiante ya ha conocido antes, e introduce luego los elementos básicos de la geometría 3D con un tratamiento que puede ser sintético, analítico o vectorial. Después se asocia la geometría al arte, la construcción o la arquitectura, mediante una introducción a la perspectiva. Como una contribución al pensamiento espacial, a continuación, se relacionan situaciones y problemas en el espacio 3D, con cortes, vistas e inscripciones de una figura en otra, que permiten usar lo aprendido en geometría 2D para resolver problemas observados en el espacio tridimensional.

Los teoremas de Pitágoras y de Tales, la semejanza y la homotecia constituyen una buena oportunidad para utilizar recursos y procedimientos del álgebra en geometría. Por ende, el módulo ofrece múltiples oportunidades para establecer conexiones internas –propias de la geometría y las matemáticas en general– y externas; es decir, con otras áreas del conocimiento y el quehacer humanos.

## Enfoque de las asignaturas de Matemática

La asignatura pone énfasis en la relación entre el conocimiento matemático, el aprendizaje de la matemática y sus aportes a la formación de las personas. Resolver problemas, aplicar razonamiento matemático y estadístico, modelar, representar, argumentar y comunicar siguen siendo aspectos centrales para la formación y el hacer de Matemática en la escuela.

A continuación, se presenta las principales definiciones conceptuales y didácticas en que se sustentan tanto la asignatura del Plan Común de Formación General, Matemática, como las asignaturas de profundización del Plan Diferenciado Humanístico-Científico.

## Proceso de aprendizaje

El conocimiento matemático y el aumento de la capacidad para usarlo tienen profundas e importantes consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas. Debido a ello, el entorno social valora ese conocimiento y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior. Al aprender matemática, las personas pueden percibirse como seres autónomos y valiosos en la sociedad; la calidad, pertinencia y amplitud de dicho conocimiento incide en sus posibilidades y su calidad de vida y en el potencial desarrollo del país.

Aprender matemática es, primordialmente, participar en la actividad matemática; es decir: que los estudiantes puedan plantearse ante problemas y traten de resolverlos por sí mismos. Dicho aprendizaje es progresivo, relacionado y enfrenta un aumento creciente de complejidad conceptual y procedimental; por ende, no consiste solo en memorizar definiciones y algoritmos. En 3° y 4° medio, esto exige aplicar simultáneamente conocimientos y procedimientos propios de aritmética, álgebra, geometría, estadística o probabilidades, para resolver un problema o modelar un fenómeno de la disciplina, de otra área del conocimiento o de la vida cotidiana.

## Desarrollo del pensamiento racional

---

Entendida como construcción cultural, la matemática tiene importantes consecuencias en el aprendizaje y la educación en general, que se originan en sus aportes indiscutibles al desarrollo del pensamiento, y en las estrategias y razonamientos que ofrece para actuar en el entorno científico, social y natural. La racionalidad de esta disciplina es inseparable de toda actividad que se relaciona con ella, trátase de la formulación de conjeturas, procedimientos, argumentos, de alguna de las diversas formas de verificación de la validez de estos, o bien del modelamiento matemático de situaciones y de la construcción del lenguaje disciplinar. Por su parte, la estadística provee maneras de pensar y de trabajar para tomar decisiones apropiadas en condiciones de incerteza, lo que la hace necesaria para enfrentar múltiples situaciones del ámbito laboral, disciplinario y del diario vivir.

## Modelamiento matemático

---

El modelamiento matemático es el proceso que busca integrar la resolución de problemas, la argumentación, el razonamiento matemático y estadístico, la representación y el estudio de fenómenos cotidianos, y problemas propios de la disciplina o de otras áreas del conocimiento y la cultura. El escenario natural para desarrollar el modelamiento matemático es uno de colaboración entre los estudiantes, pues juntos tienen mayores posibilidades de asir la complejidad de algunas situaciones que interesa considerar. De esta manera, la discusión y de la reflexión colectiva ayudan a construir conocimiento; cada cual puede enriquecerse con las opiniones de sus pares, aprender a argumentar, a convencer con argumentos fundados y a validar los avances. Todo ello incide en el aprendizaje de diversas disciplinas, y también en el desarrollo de virtudes ciudadanas.

## Problemas rutinarios y no rutinarios

---

Aprender matemática implica aplicar conocimientos y procedimientos, y elaborar estrategias para abordar los problemas propios de la disciplina o de la vida cotidiana. En ese sentido, se busca profundizar en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios como una oportunidad de aprendizaje clave en esta disciplina. Se propone avanzar en el tipo de situaciones en las cuales los estudiantes resuelven problemas, formulan posibles explicaciones o conjeturas, y en la habilidad de argumentar. Un aprendizaje central de la matemática consiste en justificar en términos disciplinares; por ende, se espera que –en esta etapa de su vida escolar– los alumnos experimenten cómo formular conjeturas y justificarlas o refutarlas.

## Metacognición

La metacognición juega un rol importante dentro de la matemática. La disciplina se aprende “haciendo matemática”, reflexionando acerca de lo hecho y confrontando la actuación propia con el conocimiento construido y sistematizado anteriormente. Por ello, están imbricadas en toda tarea matemática las habilidades de razonar, representar, modelar matemáticamente, argumentar y comunicar, y resolver problemas. Además, su desarrollo permite alcanzar niveles de abstracción y demostración cada vez más complejos y que suelen requerir de una aplicación rigurosa del lenguaje matemático. El caso de la estadística es muy similar, pero agrega una componente relativa a los datos con los cuales se trabaja, los que son siempre contextualizados.

## Aprendizaje Basado en Proyectos y Resolución de Problemas

Toda asignatura ofrece oportunidades para que los estudiantes aborden problemas vinculados a su vida cotidiana. El Aprendizaje Basado en Proyectos promueve que se organicen durante un periodo extendido de tiempo en torno a un objetivo basado en una pregunta compleja, problema, desafío o necesidad –normalmente surgida desde sus propias inquietudes– que pueden abordar desde diferentes perspectivas y áreas del conocimiento, fomentando la interdisciplinariedad. El proyecto culmina con la elaboración de un producto o con la presentación pública de los resultados. En el Aprendizaje Basado en Problemas, en cambio, se parte de la base de preguntas, problemas y necesidades cotidianas sobre los cuales los estudiantes investigan y proponen soluciones.

En el caso de Matemática, estas metodologías permiten promover situaciones de aprendizaje desafiantes, pues para desarrollarlos es necesario que se resuelva –de manera colaborativa e incorporando las tecnologías digitales– problemas reales que exigen habilidades, conocimientos y actitudes en sus distintas etapas de diseño, ejecución y comunicación.

## Ciudadanía digital

Las habilidades de alfabetización digital y uso de tecnologías que promueven las Bases Curriculares de 3° y 4° medio –como parte de las Habilidades para el siglo XXI– son fundamentales para que los alumnos trabajen en instancias de colaboración, comunicación, creación e innovación, mediante el uso de las TIC. También contribuyen a desarrollar la capacidad de utilizarlas con criterio, prudencia y responsabilidad.

Esta asignatura fomenta que los estudiantes usen las tecnologías digitales –por medio de software y aplicaciones digitales– para alcanzar diferentes niveles de comprensión y aplicación de los conocimientos y procedimientos, al modelar y resolver problemas propios de la disciplina o relacionados con otras asignaturas, o bien de la vida cotidiana. Los software y las aplicaciones digitales especialmente diseñados para aprender Matemática –como procesadores simbólicos o de geometría dinámica, simuladores, *apps*, o aquellos especialmente diseñados para el análisis estadístico, algebraico o geométrico (de los cuales hay versiones de uso libre y gratuito)– facilitan el análisis y la visualización de los conceptos o procedimientos en estudio, agilizan el testeo de conjeturas por la vía de comprobar una gran cantidad de casos particulares, y permiten desplazar la atención desde las rutinas de cálculo hacia la comprensión y resolución de un problema que se quiere modelar y resolver.

## Orientaciones para el docente

### Orientaciones didácticas

---

Para comprender la matemática con mayor profundidad, docentes e investigadores han desarrollado variados lineamientos didácticos y diversas metodologías de enseñanza. La literatura indica que, en general, cualquiera de estas formas metodológicas permite tener éxito y que la clave está en desarrollar situaciones de aprendizaje que generen un diálogo y una discusión en el ámbito de datos, representaciones y variaciones de ellos.

Desde esta perspectiva, el docente debe promover que sus estudiantes encuentren el sentido de los contenidos matemáticos y, sobre todo, que respondan según su propio contexto. La idea es priorizar la interpretación de los resultados por sobre la repetición o mecanización de algoritmos, fórmulas y definiciones. Para esto, se debe establecer conexiones entre la situación, los conceptos matemáticos involucrados, las formas de representar, las variaciones posibles y sus significados en las respuestas.

Diversas investigaciones muestran que debe utilizarse varios tipos de representaciones; por ejemplo: la recta numérica para expresar ideas sobre la operatoria, el plano cartesiano para expresar cambios y movimientos, tablas para ordenar datos, figuras geométricas para expresar propiedades geométricas, numéricas o algebraicas. Se debe usar dichas representaciones de manera articulada para entender mejor lo que se está aprendiendo y explicar visualmente el proceso para resolver un problema. Asimismo, el profesor puede verificar si un alumno conoce un concepto, cuando transita de un tipo de representación a otra; es decir, desde el lenguaje natural al simbólico o desde un lenguaje pictórico a uno simbólico y viceversa.

Aunque toda materia matemática debe presentarse de manera contextualizada, conviene insistir en modelar las situaciones, y recurrir preferentemente a aquellas que sean significativas para los estudiantes. Para esto, los jóvenes deben elegir las actividades y el docente debe ofrecer situaciones alternativas como las que se incluye en este programa. El foco para elegir o modificar las actividades radica en el interés que provocan en cada contexto escolar, a fin de motivar a la clase a trabajar en ellas.

También se debe dar libertad a los alumnos para que elijan las herramientas para trabajar. Sus habilidades argumentativas y comunicativas se pueden apoyar en un entorno de tecnologías digitales, y el uso de programas o aplicaciones facilitarán la comprensión y desarrollarán la comunicación entre pares.

La asignatura de Geometría 3D de la Formación Diferenciada para 3° y 4° medio pretende que los estudiantes continúen desarrollando su capacidad de análisis, estudio y resolución presente y futuro para favorecer su tránsito al mundo laboral y profesional, y promover su contribución a la comunidad local, nacional y global.

## Orientaciones para la evaluación

Las tareas laborales y académicas tienen hoy un carácter colaborativo; además, se recurre sin reparos a la ayuda digital para efectuar los cálculos que se requiera. Se sugiere que, en las actividades de evaluación, los estudiantes puedan usar libremente calculadoras o programas que faciliten los cálculos. También pueden trabajar en pares o grupos de hasta 4 alumnos. Los propios jóvenes y el profesor supervisarán la distribución de tareas y fechas de entrega.

Las evaluaciones forman parte del proceso de aprendizaje y pueden incluir una serie de ejercicios, tareas y actividades que se puede adaptar, dependiendo del contexto de la clase. Estas evaluaciones tienen un carácter de orientación y apoyo al aprendizaje; no pretenden determinar capacidades, pero permiten obtener información sobre los progresos, la comprensión y el aprendizaje de los contenidos y las habilidades. Es importante entregar pautas de evaluación y también entregar una retroalimentación que permita a los alumnos mejorar su aprendizaje e incluso cambiar sus calificaciones.

Hay varias alternativas de evaluación disponibles:

- *Proyectos* (de grupos o individuales): De duración variable, sirven para resolver problemas complejos, efectuar una investigación guiada o modelar un problema real. Requieren de objetivos claros, acordados previamente, y de resultados abiertos. Es la forma ideal para conectar diferentes áreas del conocimiento.
- *Diario de vida matemático*: Cuaderno o carpeta en que el estudiante desarrolla estrategias personales, exploraciones, definiciones propias o descubrimientos. El profesor puede orientar su elaboración y verificar si comprenden los conceptos que usan.
- *Portafolio*: Selección periódica de evidencias (problemas resueltos, trabajos, apuntes, en un dossier o una carpeta) recogidas en un período determinado, y que responde a uno o más Objetivos de Aprendizaje. Permiten demostrar aprendizaje y deben incluir justificación y reflexión. El estudiante tiene un rol activo en su evaluación.
- *Presentación matemática* de la resolución de un problema: Indica el proceso y los procedimientos usados. Para evaluar, se aplica criterios o indicadores como dominio del tema, uso de materiales de apoyo, uso del lenguaje. Los estudiantes deben conocer tales criterios y, eventualmente, el docente puede acordarlos con ellos.
- *Entrevista individual*: Mientras el curso trabaja en una tarea, el profesor dialoga con uno o más estudiantes de un mismo nivel de desempeño acerca de un concepto, un desafío o una pregunta relacionada con el tema abordado en la clase.
- *Actividad autoevaluable*: Al finalizar un tema o unidad, el profesor da a sus estudiantes la oportunidad de trabajar con un material que les permita autocorregirse (por ejemplo: hoja de actividades con las respuestas al reverso). A partir de los resultados, pueden verificar su avance o aquello que deben reforzar, corregir su tarea con ayuda de compañeros, completar su trabajo con recursos que estén a su alcance –como cuaderno, libros, diccionarios–, anotar sus dudas y, en última instancia, pedir ayuda al docente.

## Orientaciones para contextualización

---

La asignatura de Geometría 3D ofrece a los alumnos oportunidades de aprendizaje contextualizadas tanto en la matemática misma como en diferentes contextos, significativos, interdisciplinarios o de profundización matemática; de este modo, pueden sistematizar o aplicar los conocimientos y procedimientos aprendidos, y también idear y poner en práctica sus propias maneras de abordar aquellos fenómenos y problemas.



## Organización curricular

Las Bases Curriculares de las asignaturas de profundización de Matemática presentan Objetivos de Aprendizaje de dos naturalezas: unos de habilidades<sup>3</sup>, comunes a todas las asignaturas científicas del nivel, y otros enfocados en el conocimiento y la comprensión. Ambos tipos de objetivo se entrelazan en el proceso de enseñanza-aprendizaje, junto con las actitudes propuestas desde el marco de Habilidades para el siglo XXI.

### Objetivos de Aprendizaje para 3° y 4° medio

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

#### Habilidades

##### Resolver problemas

- a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.
- b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

##### Argumentar y Comunicar

- c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.
- d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

##### Modelar

- e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
- f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

##### Representar

- g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.
- h. Evaluar diferentes representaciones, de acuerdo a su pertinencia con el problema a solucionar.

<sup>3</sup> No es necesario seguir un orden lineal al enseñar el proceso de investigación, se puede trabajar cada uno de los Objetivos de Aprendizaje en forma independiente.

### Habilidades digitales

- i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.
- j. Desarrollar un trabajo colaborativo en línea para discusión y resolución de tareas matemáticas, usando herramientas electrónicas de productividad, entornos virtuales y redes sociales.
- k. Analizar y evaluar el impacto de las tecnologías digitales en contextos sociales, económicos y culturales.
- l. Conocer tanto los derechos propios como los de los otros, y aplicar estrategias de protección de la información en ambientes digitales.

### Conocimiento y comprensión

1. Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.
2. Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.
3. Resolver problemas que involucren relaciones entre figuras 3D y 2D en las que intervengan vistas, cortes, proyecciones en el plano o la inscripción de figuras 3D en otras figuras tridimensionales.
4. Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.
5. Diseñar propuestas y resolver problemas relacionados con perspectiva, proyección paralela y central, puntos de fuga y elevaciones, tanto en arte como en arquitectura, diseño o construcción, aplicando conceptos y procedimientos de la geometría 3D.

## Visión global del año

Unidad 1:	Unidad 2:	Unidad 3:	Unidad 4:
Representación vectorial de situaciones y fenómenos	Rectas y planos en el espacio	Generación de cuerpos utilizando patrones geométricos	Los objetos con sus caras y perspectivas
Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Aprendizaje
<p><b>OA 1.</b> Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.</p> <p><b>OA a.</b> Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.</p> <p><b>OA g.</b> Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.</p>	<p><b>OA 2.</b> Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.</p> <p><b>OA b.</b> Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.</p> <p><b>OA d.</b> Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.</p>	<p><b>OA 4.</b> Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.</p> <p><b>OA a.</b> Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.</p> <p><b>OA g.</b> Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.</p>	<p><b>OA 3.</b> Resolver problemas que involucren relaciones entre figuras 3D y 2D en las que intervengan vistas, cortes, proyecciones en el plano o la inscripción de figuras 3D en otras figuras tridimensionales.</p> <p><b>OA 5.</b> Diseñar propuestas y resolver problemas relacionados con perspectiva, proyección paralela y central, puntos de fuga y elevaciones, tanto en arte como en arquitectura, diseño o construcción, aplicando conceptos y procedimientos de la geometría 3D.</p> <p><b>OA a.</b> Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.</p>

	<p><b>OA g.</b> Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.</p>		<p><b>OA g.</b> Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.</p>
<p><b>Actitudes</b></p>	<p><b>Actitudes</b></p>	<p><b>Actitudes</b></p>	<p><b>Actitudes</b></p>
<p>Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.</p> <p>Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.</p>	<p>Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.</p> <p>Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.</p>	<p>Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.</p> <p>Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.</p>	<p>Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.</p> <p>Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de tareas colaborativas y en función el logro de metas comunes.</p>
<p>Tiempo estimado 10 semanas</p>	<p>Tiempo estimado 10 semanas</p>	<p>Tiempo estimado 9 semanas</p>	<p>Tiempo estimado 9 semanas</p>

# Unidad 1

# Unidad 1: Representación vectorial de situaciones y fenómenos

## Propósito de la unidad

Los estudiantes utilizan la representación vectorial para describir situaciones y fenómenos de la vida diaria, y comunican sus resultados de manera gráfica y también algebraica. Asimismo, comprenden y utilizan las propiedades de las operaciones con vectores, y aplican este conocimiento en la representación de isometrías y homotecias. También interpretan situaciones mediante ecuaciones vectoriales y profundizan en el uso de los vectores. Algunas preguntas que pueden orientar esta unidad son: ¿Cómo se puede calcular y representar la dirección del movimiento? ¿Qué implicancias tienen las operaciones y propiedades de los vectores al describir un fenómeno?

## Objetivos de Aprendizaje

### OA 1.

Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

## Actividad 1: Representar situaciones con vectores

### PROPÓSITO

Se espera que los jóvenes recuerden lo que han estudiado hasta ahora de vectores y que profundicen en algunas de sus características esenciales. Trabajarán el concepto de vector, efectuarán operaciones con vectores y escalares, y harán la representación gráfica, usando el plano cartesiano en 2D. Pueden utilizar herramientas manuales y digitales para responder y representar la situación cotidiana sobre caminos. Estas actividades buscan ser un punto de partida para vincular el uso habitual de los vectores –que se presenta de forma sistemática en la vida escolar– con un estudio más profundo del álgebra en la educación superior.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 1.** Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### DESCRIBIR TRAYECTOS DE MANERA PRECISA

Para las siguientes actividades, los alumnos pueden utilizar el software GeoGebra. Para ello, crean una cuenta en [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) y generan una carpeta o “Portafolio Digital” para guardar y compartir todos los trabajos o proyectos que hagan con este programa.

Entre los muchos atractivos turísticos de la ciudad de Valdivia, se puede cruzar caminando el puente Pedro de Valdivia que conecta con la Isla Teja. Asimismo, hay varias rutas para recorrer caminando, y el trayecto seguido dependerá de las condiciones geográficas. También se puede navegar por el río Calle Calle en veleros, catamaranes, barcasas, entre otras embarcaciones. Cuando se navega, hay que considerar que la velocidad del viento y la velocidad con que fluye el río afectan a la embarcación. A partir de esa información, en los siguientes ejercicios se describirá rutas en las que pueden influir o no distintas fuerzas a la vez, usando vectores.



Fig. 1: Ciudad de Valdivia, puente Pedro de Valdivia. (Fuente: Google Maps).

1. Una persona está ubicada en un extremo del puente Pedro de Valdivia y desea cruzar hacia la isla Teja, ¿cómo describirías el trayecto que debe seguir?
  - a. ¿Hacia dónde debe moverse? ¿Cuál es el sentido de su movimiento?
  - b. ¿En qué dirección se debe mover? Haz la diferencia con la pregunta anterior.
  - c. ¿Cuánto se debe mover? ¿Cuál es la distancia que debe recorrer? Si usas la opción de medir distancia en la aplicación de Google Maps, puedes obtener la longitud aproximada del puente.
  - d. Si solo hubieses usado un número para describir el trayecto de la persona, ¿habrías logrado ser tan preciso? ¿Cómo lo habrías hecho?
  
2. Observa el desplazamiento de una persona desde el punto A hasta el punto B. Construye un vector usando GeoGebra, como se muestra en la siguiente figura.

Conexión  
interdisciplinaria:  
Educación Ciudadana,  
OA a, 3° y 4° medio

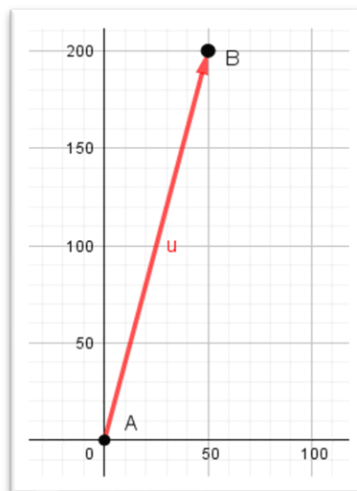


Fig. 2: Vector en el plano cartesiano



- a. Indica las coordenadas del punto de origen y del punto extremo.

Tabla 1: Notaciones de un punto en el plano cartesiano

Notación	Punto de origen o punto inicial	Punto extremo o punto terminal
$P(a; b)$		
$P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$		

- b. Indica cuál es el vector de desplazamiento.

Tabla 2: Notaciones de un vector en el plano cartesiano

Notación	Vector de desplazamiento
$\vec{u} = (u_1; u_2)$	
$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$	

- c. ¿Cuál es la diferencia entre los puntos y el vector? ¿Cuál es la diferencia geométrica y en el contexto, entre un punto y un vector?
3. Indica cómo se pueden obtener las coordenadas del vector de desplazamiento, usando las coordenadas del punto origen y del extremo.
- Prueba con otros casos puntuales para corroborar tu conjetura.
  - Copia el vector en otro lugar del plano cartesiano, respetando la dirección, el sentido y el módulo.
  - Vuelve a determinar, como hiciste antes, las coordenadas del nuevo vector, usando el punto de partida y de llegada, ¿qué obtuviste?
  - ¿Cómo se interpreta que dos vectores, cuyas coordenadas son iguales, puedan estar ubicados en distintos lugares en el plano cartesiano? Explica también usando el contexto dado al inicio.
  - ¿Se puede afirmar que los vectores anteriores son iguales?

4. Supón que una persona, además de cruzar a la Isla Teja por el puente Pedro de Valdivia, decide continuar caminando por la orilla del río Calle Calle. Su trayectoria podría describirse mediante la figura:

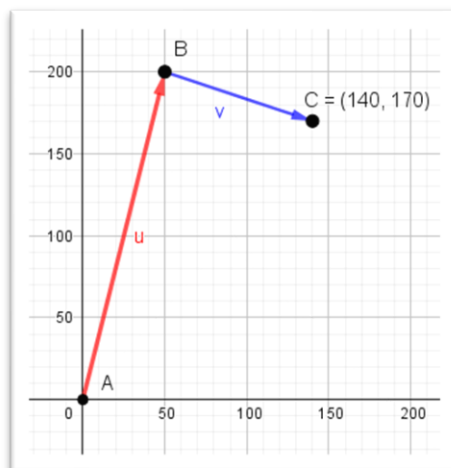


Fig. 2: Desplazamientos consecutivos en el plano cartesiano

- Indica las coordenadas de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
  - Si pudieras ir de  $A$  hasta  $C$  en línea recta, ¿qué camino seguirías? Márcalo en el gráfico anterior.
  - ¿Qué vector describe el trayecto que seguirías? Llama al nuevo vector  $\vec{w}$ .
5. Observa la figura y úsala como referente para explicar: ¿cómo podrías obtener las coordenadas del vector  $\vec{w}$  a partir de las coordenadas de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ?

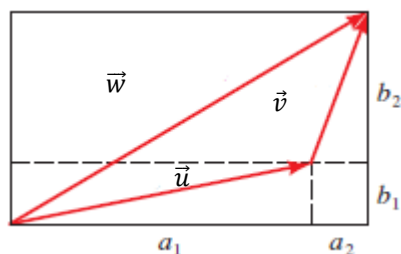


Fig. 3: Suma de vectores

- ¿Cómo se resta dos vectores?
  - ¿Cuáles serían las coordenadas del vector resultante?
  - ¿Cómo se interpreta la resta de dos vectores en este contexto?
6. Si una persona, luego de cruzar el puente, decide caminar la misma distancia que ya había recorrido en el mismo sentido y dirección:
- ¿A qué punto llegaría? Márcalo en el plano cartesiano anterior.
  - ¿Qué vector podría describir el desplazamiento total del punto  $A$  al punto  $D$ ?
  - Usando la figura como referente, determina las coordenadas del vector  $\vec{t}$  a partir de las coordenadas del vector  $\vec{u}$ .
  - Prueba multiplicando por otros escalares al vector  $\vec{u}$ . No todos enteros positivos.

- e. En GeoGebra, dibuja un vector cualquiera y, usando un deslizador, multiplica dicho vector por un escalar cualquiera o usa el applet “Escalar por vector”.
- f. Generaliza: ¿qué se obtiene al multiplicar un vector por un escalar?

## REPRESENTAR DESPLAZAMIENTOS MEDIANTE VECTORES

1. Una persona desea cruzar un río en un bote con motor y llegar justo al frente de donde se encuentra. Como se muestra en la figura, el bote debe ir del punto A al punto B.



Fig. 4: Puntos de partida y llegada al cruzar un río

2. Si en el momento de cruzar, la corriente superficial del río en ese lugar es de  $2 \frac{m}{s}$  en la dirección suroeste, ¿qué vector describe la velocidad del río? Márcalo en la figura 4.
3. Considera que la rapidez del bote es de  $7 \frac{m}{s}$ .
  - a. Aproximadamente, ¿hacia dónde debería apuntar la proa del bote para que pueda llegar de A hasta B, considerando la corriente del río?
  - b. ¿Cuál es el vector de la velocidad del bote? Marca un vector aproximado en la figura 4.
4. ¿Cuál es el vector que muestra el curso real que seguiría el bote, dadas la corriente y la dirección de la proa del bote? Bosqueja el vector en la figura 4.
5. Ubicando de forma conveniente el plano cartesiano, la situación puede describirse como se muestra en la figura 5.
  - a. ¿Cuáles son las coordenadas del vector  $\vec{u}$ ? Completa:
 
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$
  - b. ¿Qué representa  $\theta$  en el contexto estudiado?

- c. ¿Cuáles son las coordenadas del vector  $\vec{v}$  en términos de  $\theta$ ? Completa:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$

- d. ¿Qué relación geométrica se da entre los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ ?

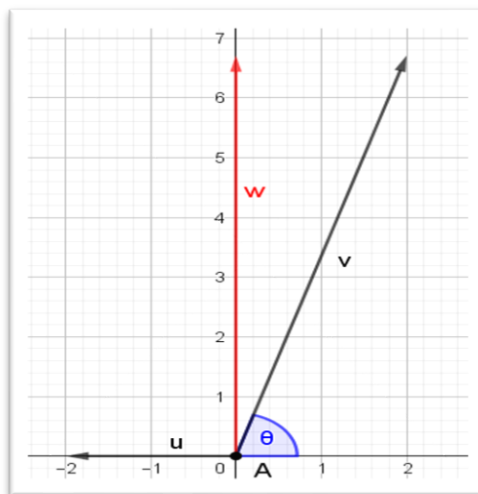


Fig. 5: Vectores en el plano cartesiano

6. Plantea las ecuaciones para obtener de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7\text{sen}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7\cos(\theta) \\ 7\text{sen}(\theta) \end{pmatrix}$$

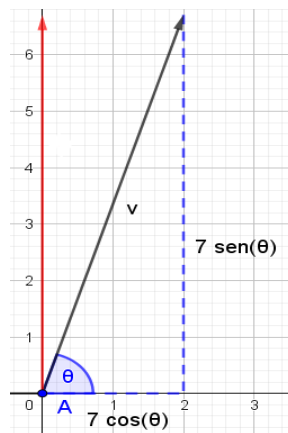
- Resuelve y determina el valor de  $\theta$ .
- Responde nuevamente: ¿hacia dónde debería apuntar la proa del bote para que pueda llegar desde A hasta B, considerando la corriente del río?

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere que, para tratar el módulo de un vector, se mida directamente la longitud del vector o se use el teorema de Pitágoras.
- Cabe notar que tiene sentido hablar sobre velocidad en este contexto. Se sugiere especificar a los alumnos las diferencias técnicas entre las palabras rapidez (relación entre distancia y tiempo) y velocidad (relación entre distancia y tiempo que tiene una dirección). Destaque que habitualmente no se hace esta diferencia en lenguaje común, pero hay que hacerla en términos matemáticos y físicos.
- Se recomienda evidenciar que uno de los aspectos esenciales del trabajo con vectores es la diferencia entre un punto y un vector, lo cual generalmente confunde a los estudiantes debido a las similitudes en la notación algebraica. Para ello, se introduce la notación vertical de un vector. Por

ejemplo,  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$  que debe distinguirse del punto  $A = (5; -1)$ . Del mismo modo, se debe aclarar el significado y las notaciones para un vector, un rayo o un segmento.

4. Luego analizan un vector que puede tener origen en el centro del plano cartesiano o fuera de él, y concluyen que un vector se define según su punto de origen y su punto extremo, y no solo por el primero de ellos. Conviene que reflexionen sobre las diferencias entre un vector, un rayo y un segmento.
5. En cuanto a la suma de vectores, se recomienda plantearla primero de forma gráfica para concluir desde aquí hacia la forma algebraica, y hacer lo mismo para el caso del producto entre un vector y un escalar.
6. También se sugiere que sepan diferenciar cuándo un vector ya no se usa para representar desplazamientos, sino velocidades. Conviene ubicar el plano cartesiano a conveniencia, de modo que no coincida con los puntos cardinales. En este caso, la idea es que dos de los tres vectores involucrados coincidan con los ejes del plano; así, toda la atención se centra en un solo vector y en la necesidad de determinar sus componentes.
7. Cabe recordar cómo se vinculan las razones trigonométricas con las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. Además, es importante considerar que la medida de la hipotenusa en el triángulo rectángulo corresponde al módulo del vector  $\vec{v}$  o la velocidad del bote, como se muestra en la siguiente figura:



8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Representan situaciones de movimiento, utilizando vectores y operatoria entre ellos de forma pictórica y simbólica.
  - Relacionan medidas angulares, la dirección del vector y el desplazamiento, utilizando el modelo vectorial.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

### *Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- GeoGebra online  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/classic?lang=es>
- Razones trigonométricas para usar en las componentes vertical y horizontal de un vector  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://jorgefernandezherce.es/proyectos/angulo/temas/tema/index.html>
- Google Maps  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.google.cl/maps/preview>

## Actividad 2: Aplicar homotecias en obras de arte

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes profundicen en el estudio de la homotecia vectorial, iniciada en 1° Medio. En esta oportunidad, se buscará generalizar la homotecia para un valor cualquiera de factor de homotecia, relacionando y, a la vez, diferenciando entre producto de vector por escalar y la homotecia aplicada a un punto o una figura. Para esto, trabajan colaborativamente en la resolución de problemas y usan la homotecia vectorial para comprender cómo la emplearon los pintores renacentistas para mejorar su trabajo, a partir de la masificación de la cámara oscura.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 1.** Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### APLICAR HOMOTECIAS Y ANALIZAR LOS RESULTADOS

Se sugiere que trabajen las siguientes actividades en grupos. Podrán utilizar el software GeoGebra. Tienen que crear una cuenta en [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) y generar una carpeta o “Portafolio Digital” para guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados con este programa.

1. Dibujen tres puntos cualesquiera en el plano cartesiano. Identifiquen sus coordenadas y luego únanlos, formando un polígono:

2. Ahora dibujen un vector cualquiera en el plano cartesiano. Nombren  $\vec{u}$  al vector.
  - a. ¿Cuál es el origen y el extremo del vector? Discutan en el grupo y respondan.
  - b. Completen con las coordenadas del vector:
 
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$
3. Apliquen el vector  $\vec{u}$  al punto  $A$ . Es decir, copien  $\vec{u}$  desde  $A$ .
  - a. ¿Qué tipo de movimiento en el plano han realizado sobre  $A$ ? Discutan y respondan.
  - b. Apliquen también el vector  $\vec{u}$  sobre los demás vértices y luego unan las imágenes de los vértices  $A, B$  y  $C$ , formando un polígono.
  - c. ¿Cómo es la nueva figura obtenida con las imágenes del triángulo? Discutan y respondan.
  - d. ¿Qué tipo de movimiento se aplicó a la figura inicial? Discutan y respondan.
4. Dibujen un punto en el plano cartesiano  $O$ , que se usará como centro de la homotecia.
  - a. Dibujen el vector  $\vec{v}$  que va desde  $O$  hasta  $A$ .
  - b. Desde  $O$ , pasando por  $A$ , dibujen el vector  $2\vec{v}$ . Se dirá que el factor de homotecia es  $k = 2$ .
  - c. Indiquen las coordenadas de  $A'$  luego de aplicar la homotecia de centro  $O$  y factor de homotecia 2.
5. Repitan todos los pasos anteriores con los demás vértices del triángulo.
  - a. Unan los puntos imágenes, ¿cómo es la figura que se ha obtenido? Discutan y respondan.
  - b. Comparen este movimiento en el plano con la traslación aplicada anteriormente. Señalen las semejanzas y diferencias.
6. Completen la tabla para determinar cómo podrían obtenerse las coordenadas de los puntos imágenes, sin necesidad de contar con la representación en el plano cartesiano.

Tabla 1: Puntos imágenes a partir de aplicar la homotecia

Origen vector Punto $O$	Punto extremo vector	Coordenadas vector	Vector ponderado por la razón de homotecia	Vértice figura	Vértice imagen
$O( ; )$	$A( ; )$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$	$k\vec{v} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$	$A( ; )$	$A'( ; )$
$O( ; )$	$B( ; )$	$\vec{w} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$	$k\vec{w} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$	$B( ; )$	$B'( ; )$
$O( ; )$	$C( ; )$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$	$k\vec{a} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$	$C( ; )$	$C'( ; )$

7. Busquen una forma de obtener los vértices imagen a partir de la primera y la cuarta columnas de la tabla anterior. Analicen y comenten su procedimiento.
8. Ahora construyan un applet usando alguna herramienta digital para trabajar la homotecia. Creen un deslizador que permita hacer variar el parámetro  $k$  (factor de homotecia). El rango para el factor de homotecia puede definirse entre  $-10$  y  $10$  con un incremento decimal de  $0,1$ .



- a. Analicen el caso  $k > 1$ :
- ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}'$  y  $\vec{w}'$ ? Expliquen.
  - ¿Cuál es la dirección y el sentido de estos vectores? Compárenlas con la dirección y el sentido de los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , respectivamente.
  - ¿Cuál es el módulo de los vectores  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}'$  y  $\vec{w}'$ ? Compárenlas con los módulos de los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  mediante un cociente, respectivamente.
  - Describan en términos generales la figura imagen respecto de la figura inicial.
- b. Para los siguientes casos, analicen y respondan las mismas preguntas que en a. Utilicen el applet construido.
- Caso  $k = 1$
  - Caso  $0 < k < 1$
  - Caso  $k < -1$
  - Caso  $k = -1$
  - Caso  $-1 < k < 0$
  - Caso  $k = 0$

## EL CONCEPTO DE HOMOTECIA EN EL ARTE

Se sugiere que trabajen las siguientes actividades en grupos.

1. ¿Cómo creen que algunos artistas del Renacimiento lograban conseguir tal perfección en sus obras de arte? Discutan en el grupo y redacten su mejor aproximación para contestar la pregunta.

Conexión  
interdisciplinaria:  
Artes OA 6,  
3° y 4° medio



Fig. 1: "La lechera". Obra de Johannes Vermeer, 1660.

- a. Si aún no existía la fotografía, ¿cómo pudo Johannes Vermeer retratar con tanta exactitud esta escena llamada "La lechera"? Discutan en el grupo y redacten su mejor aproximación para contestar la pregunta.
- b. ¿Tendrían ciertos artistas del Renacimiento alguna técnica para retratar el momento y luego pintarlo, sin hacer que los retratados tuvieran que pasar horas estáticos? ¿Qué creen que hacían? Investiguen en la web y discutan en el grupo, según las fuentes a las que accedieron.

2. Simplificando un poco la realidad para poder estudiarla más fácilmente, supongamos que un artista desea pintar algo muy simple, solo en dos dimensiones, como un palito de fósforo.
- a. Se puede ilustrar una simplificación de la cámara oscura mediante un dispositivo como el de la figura 2.

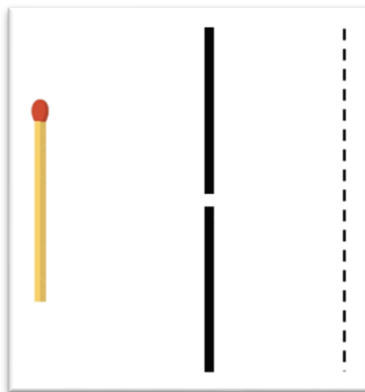


Fig. 2: Simplificación de cámara oscura. Fósforo, diafragma y pantalla de proyección.

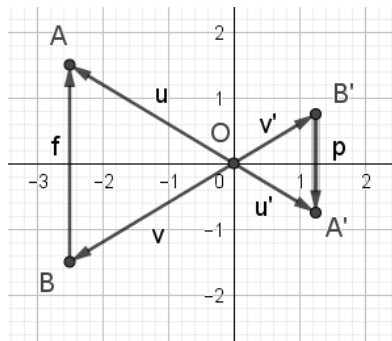
- b. Rehagan la imagen anterior, usando vectores en el plano cartesiano. Analicen cuidadosamente los pasos a seguir y lleguen a un consenso.
- Ubiquen el origen del plano cartesiano en el orificio del diafragma.
  - Usen un vector  $\vec{f}$  para representar la posición del fósforo, considerando la cabeza del fósforo como el sentido del vector. Indiquen el módulo del vector  $\vec{f}$ .
  - Usen vectores para representar cómo se puede ver el fósforo desde el orificio del diafragma (se considera que el fósforo emite su propia luz). Señalen claramente el sentido de los vectores.
  - Remarquen los dos vectores del diafragma a los extremos del fósforo ( $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ). Indiquen sus coordenadas. ¿Cómo ha resultado la tarea hasta aquí?
  - Revisen los pasos que dieron, expliquen el proceso dentro del grupo y evalúen la pertinencia de cada paso; mejoren la estrategia cuando sea posible.
- c. ¿Cómo será la imagen del fósforo proyectada en la pantalla? Compárenla con la imagen real del fósforo.
- Usen dos vectores,  $\vec{u}'$  y  $\vec{v}'$ , para representar cómo atraviesa la luz por el orificio del diafragma hasta la pantalla de proyección. Indiquen sus coordenadas.
3. Discutan en el grupo y argumenten por qué esta situación corresponde a una homotecia vectorial.
- a. Señalen dónde se ubica, idealmente, el centro de homotecia y cuáles son sus coordenadas.
  - b. ¿Cuál es el valor del factor de homotecia? Expliquen cómo determinaron este valor.
  - c. El signo del factor de homotecia, ¿coincide con la posición de la imagen proyectada del fósforo?
  - d. Dibujen un vector  $\vec{p}$  para representar la imagen del fósforo, e indiquen módulo, dirección, sentido y sus coordenadas.
  - e. Determinen las coordenadas de  $\vec{p}$ , usando una estrategia algebraica que involucre el factor de la homotecia y otros vectores conocidos en el problema.

4. ¿Existe alguna distancia al diafragma en la que se podría ubicar el fósforo para obtener una imagen que sea la cuarta parte su longitud (original)? Analicen y determinen las coordenadas de  $\vec{f}$  y de  $\vec{p}$ , de ser posible.
  - a. ¿Se podría cumplir que  $\vec{f} = \vec{p}$ ? ¿Cómo explicarían esto al grupo?
  - b. ¿Se podría cumplir que  $\vec{f} = -1\vec{p}$ ? ¿Cómo explicarían esto al grupo?
5. Volviendo a los pintores del Renacimiento que usaron esta técnica:
  - a. ¿Cómo eran las imágenes que debían pintar en relación con las imágenes reales? Expliquen.
  - b. ¿Qué debían hacer con el cuadro (en relación con la posición de las imágenes contenidas en el retrato) para poder exhibirlo? Expliquen.
  - c. ¿Qué creen que pasaría con la imagen proyectada si el orificio del diafragma fuera muy grande?
  - d. ¿En qué condiciones podrían haber obtenido un retrato a tamaño real? Analicen y expliquen.

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere recordar que ya vieron la homotecia en 1° Medio. Ahora se incorpora el plano cartesiano como medio para conocer el sentido, la dirección y la magnitud de vectores que representan situaciones reales.
2. Se recomienda comenzar usando los vectores para trasladar un punto ubicado en el plano cartesiano, y seguir luego con la traslación de un polígono. Esto será el punto de partida para llegar a la homotecia con vectores, que tiene otras particularidades.
3. En cuanto a la homotecia, se sugiere relacionar adecuadamente conceptos como el factor de homotecia y de centro de homotecia, en el contexto de las coordenadas del plano cartesiano y el uso de vectores. Hay que destacar la diferencia entre el producto de un escalar por un vector y la homotecia, dado que el primero es un paso para obtener la homotecia y no la homotecia en sí misma.
4. Se busca generalizar para distintos valores de la razón de homotecia, determinando qué ocurre con la figura homotética en relación con la figura original. Los alumnos se apoyan en la construcción de un applet GeoGebra para probar con varios casos.
5. Respecto de la homotecia en el contexto del arte, se sugiere simplificar la situación a un caso abordable en 2D. Consiste en emplear una cámara oscura de la época del Renacimiento, con la que algunos artistas podían retratar una escena real de forma más exacta al “tomar una fotografía”. Sin embargo, la fotografía aparecía invertida y esto implicaba cambiar la imagen presentada como pintura.

6. Para el buen desarrollo de la actividad, tienen que acordar cómo se representará la situación simplificada en el plano y qué vectores se empleará, como se muestra en la siguiente imagen:



7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
- Representan situaciones de movimiento, utilizando vectores y operatoria entre ellos de forma pictórica y simbólica.
  - Relacionan isometrías y homotecias con vectores para describir y dar soluciones a una situación en forma simplificada.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- GeoGebra online  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/classic?lang=es>
- Pasos para construir una cámara oscura  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=2\\_zz0xJW-L0](https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=2_zz0xJW-L0)  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://experimentodefisica-valentina.blogspot.com/>

## Actividad 3: Transitar de 2D a 3D por medio de ecuaciones y vectores

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes vinculen el estudio de los vectores con las ecuaciones de rectas, que ya trabajaron en cursos anteriores. Ahora se presentará los vectores como una herramienta muy útil para determinar la ecuación de una recta, usando un punto y un vector, y diferenciando respecto de cómo lo hacían antes: con dos puntos de la recta o punto y pendiente. Al determinar la ecuación de una recta de este modo, se introduce el concepto de ecuaciones vectoriales, que se usan en variados contextos. Es la oportunidad de permitir que los alumnos se enfrenten libremente a la forma de representar y resolver el problema, utilizando las herramientas matemáticas que consideren necesarias.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 1.** Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

**Duración:** 18 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### RECTAS POR MEDIO DE UN VECTOR

Pueden usar utilizar el software GeoGebra para las siguientes actividades; recuerden guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. Dibuja un vector  $\vec{a}$  que parta desde el origen del plano cartesiano y cuyo punto terminal sea el punto  $A$ .
  - a. ¿Cuáles son las componentes del vector  $\vec{a}$  ?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

- b. Compara las componentes de  $\vec{a}$  con las coordenadas de  $A$ .
- c. El vector  $\vec{a}$  se llama vector posición de  $A$ ; ¿por qué crees que recibe este nombre?
- d. ¿Existe otro vector posición de  $A$  distinto al vector  $\vec{a}$ ? ¿Cuál? ¿Cómo lo encontraste?

2. Dibuja un vector  $\vec{b}$  cualquiera en el plano cartesiano anterior, que sea distinto al vector  $\vec{a}$ .
  - a. ¿Cuáles son las componentes del vector  $\vec{b}$ ?
 
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{pmatrix}$$
  - b. ¿Puedes trazar alguna recta que pase por el punto  $A$  y que contenga al vector  $\vec{b}$ ? ¿Existe dicha recta?
  - c. Traza una recta  $L$  que pase por el punto  $A$  y que tenga la misma dirección que el vector  $\vec{b}$ .
  - d. ¿Se puede afirmar que la recta  $L$  y el vector  $\vec{b}$  tienen el mismo sentido? Explica a tu compañero cómo argumentas tu respuesta.
3. Considera solo la gráfica para responder:
  - a. ¿Se puede determinar siempre una recta, conocido un punto de ella y que tenga la misma dirección que un vector dado?
  - b. ¿Cómo se podría obtener la ecuación de dicha recta con la misma información? Conjetura.

### LA ECUACIÓN VECTORIAL

1. En GeoGebra, dibuja el punto  $A$ , el vector de posición  $\vec{a}$ , el vector  $\vec{b}$  y la recta  $L$ .
2. Desde  $A$  copia el vector  $\vec{b}$ . En GeoGebra lo puedes arrastrar fácilmente.
  - a. ¿Cuáles son ahora las coordenadas del punto inicial y del punto terminal de  $\vec{b}$ ?

Tabla 1: Componentes y coordenadas del vector  $\vec{b}$

Componentes de $\vec{b}$	Coordenadas Punto inicial de $\vec{b}$	Coordenadas Punto terminal de $\vec{b}$
$\vec{b} = \begin{pmatrix} \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{pmatrix}$	$A( \phantom{x} ; \phantom{x} )$	$C_1( \phantom{x} ; \phantom{x} )$

- b. Dibuja el vector posición  $\vec{c}_1$  del punto  $C_1$ .
- c. ¿Cuál es la relación matemática que existe entre los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}_1$ ? ¿Cómo se puede obtener el vector  $\vec{c}_1$  a partir de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ?

3. Desde  $A$  copia el vector  $2\vec{b}$ .
- a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto inicial y del punto terminal de  $2\vec{b}$ ?

Tabla 2: Componentes y coordenadas del vector  $2\vec{b}$ 

Componentes de $2\vec{b}$	Coordenadas Punto inicial de $2\vec{b}$	Coordenadas Punto terminal de $2\vec{b}$
$2\vec{b} = \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right)$	$A( \phantom{0} ; \phantom{0} )$	$C_2( \phantom{0} ; \phantom{0} )$

- b. Dibuja el vector posición  $\vec{c}_2$  del punto  $C_2$ .
- c. ¿Cuál es la relación matemática que existe entre los vectores  $\vec{a}$ ,  $2\vec{b}$  y  $\vec{c}_2$ ? ¿Cómo se puede obtener el vector  $\vec{c}_2$  a partir de los vectores  $\vec{a}$  y  $2\vec{b}$ ?
4. Desde  $A$  copia el vector  $-\vec{b}$ .
- a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto inicial y del punto terminal de  $-\vec{b}$ ?

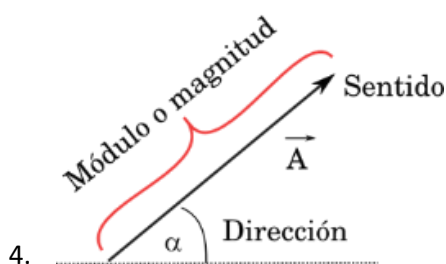
Tabla 3: Componentes y coordenadas del vector  $-\vec{b}$ 

Componentes de $-\vec{b}$	Coordenadas Punto inicial de $-\vec{b}$	Coordenadas Punto terminal de $-\vec{b}$
$-\vec{b} = \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right)$	$A( \phantom{0} ; \phantom{0} )$	$C_3( \phantom{0} ; \phantom{0} )$

- b. Dibuja el vector posición  $\vec{c}_3$  del punto  $C_3$ .
- c. ¿Cuál es la relación matemática que existe entre los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}_3$ ? ¿Cómo se puede obtener el vector  $\vec{c}_3$  a partir de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ? Explica tu procedimiento a tu compañero, destacando los pasos que te parecen más importantes o que se puede volver a usar en otros casos.
5. Generaliza: ¿cómo se obtiene el vector de posición de un punto cualquiera sobre la recta, a partir de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ?
- a. Completa:
- $$\vec{c} = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$$
- b. ¿Qué diferencia hay entre un punto de esta recta y la posición vectorial de dicho punto en la recta? Explica.
6. Usando la ecuación anterior (llamada ecuación vectorial), ¿cómo puedes obtener las coordenadas de un punto cualquiera sobre la recta? Justifica.
7. Prueba dando valores específicos a  $k$ .

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Note que aquí el estudiante caracterizará una recta en el plano cartesiano, a partir de un punto de la recta y un vector con la misma dirección. Dado que la ecuación de la recta está dada en términos de vectores y no de puntos en el plano, surge el concepto de ecuación vectorial de una recta.
2. Se sugiere apoyarlos para que diferencien el vector posición con el punto terminal, dado que hay coincidencia en términos numéricos. Son objetos geométricos diferentes y la notación puede ayudar a la comprensión: en el caso del punto las coordenadas, se escriben como  $A(x; y)$  y en el caso del vector, las componentes se escriben como  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .
3. Para establecer la diferencia entre dirección y sentido, se sugiere repasar la definición de vector. Un esquema que puede ayudar es:



5. También se requiere comprender que una recta no tiene sentido, por lo que se puede comparar con un vector solo considerando la dirección.
6. En la segunda parte, se sugiere usar GeoGebra para visualizar de forma rápida muchos casos de " $k\vec{b}$ "; incluso se puede construir un applet en GeoGebra, implementando un deslizador para  $k$ . Si no se cuenta con el software, la actividad se puede hacer perfectamente, solo que la cantidad de casos (valores distintos de  $k$ ) que pruebe cada alumno será mucho más limitada.
7. En el punto (5), se espera que completen con la expresión  $\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$ , donde  $k \in \mathbb{R}$ .
8. Se sugiere enfatizar que la ecuación vectorial corresponde a  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ . Después de determinar la ecuación vectorial, se puede usar para establecer un punto específico perteneciente a la recta.
9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Representan situaciones de movimiento, utilizando vectores y operatoria entre ellos de forma pictórica y simbólica.
  - Relacionan medidas angulares, la dirección del vector y el desplazamiento, utilizando el modelo vectorial.



## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- GeoGebra online  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/classic?lang=es>
- Tutorial y explicación de cómo obtener una ecuación vectorial, dado un punto y un vector  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=RV3TFyVrYBs>

## Actividad 4: Las ecuaciones vectoriales y los fenómenos de la naturaleza

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes apliquen los vectores en un contexto simplificado y, específicamente, las ecuaciones vectoriales. Principalmente, se busca que valoren la ecuación vectorial por su aporte para entender fenómenos de la naturaleza que pudieron haber estudiado en otras asignaturas, pero que, en este caso, se generalizan matemáticamente. Para esto, hay que fomentar un trabajo colaborativo, considerando las habilidades y experticia de cada integrante del grupo. Además, se pretende que experimenten cómo, a medida que se modifica, agrega o quita variables de la realidad, se puede simplificar el modelo matemático obtenido o aumentar su complejidad.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 1.** Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### DETERMINANDO UNA ECUACIÓN VECTORIAL SEGÚN UN PRIMER MODELO

Trabajan en grupos con un computador, usando Geogebra; recuerden guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. Comparte con tus compañeros de grupo las respuestas a las siguientes preguntas:
  - a. ¿Sabías que algunas estrellas que puedes ver en una noche podrían haberse extinguido?
  - b. ¿Sabías que la posición en la que tú ves una estrella no es exactamente la posición en la que se encuentra?
  - c. ¿Y que esta variación depende de las capas de la atmósfera y, principalmente, de un fenómeno llamado refracción?
2. Lee a tus compañeros de grupo la siguiente información: “El cambio de dirección y velocidad que experimenta una onda al pasar de un medio a otro se debe al fenómeno de la refracción, si cada medio tiene distinto índice refractivo. Esto ocurre solo si la onda incide oblicuamente sobre la superficie de separación de los dos medios. Este fenómeno se puede observar a pequeña escala, como ocurre al sumergir una parte de una bombilla (pajilla) en un vaso con agua, o al mirar las estrellas y creer que están en cierta posición, cuando en realidad no lo están”.

- a. ¿Cómo responderías ahora las preguntas anteriores?
  - b. ¿Te aporta de alguna manera el párrafo anterior para cambiar tus respuestas?
  - c. ¿Te ayuda a justificar tus respuestas?
  - d. ¿qué es el índice de refracción y qué mide?
3. Consideren ahora un supuesto de primer modelo: En nuestro planeta ocurren iteradas refracciones de la luz en el aire, debido al aumento del índice de refracción con la densidad del aire –lo cual conlleva un cambio continuo de la dirección del vector de la luz–; en este caso, se simplifica el modelo geométrico y físico con el supuesto de que no se haga refracción alguna. Consideren que el rayo de luz de una estrella llega a un lugar específico en la Tierra, donde está parado un observador (punto  $P$ ). La situación se representa en la figura 1.
- a. Incluye un plano cartesiano en la figura. ¿Te ayuda en algo? ¿Por qué?
  - b. ¿En qué punto conviene ubicar el origen del plano cartesiano?
  - c. Discutan en el grupo y argumenten su decisión.

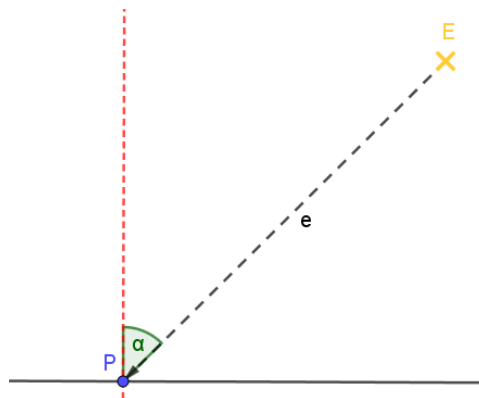


Fig. 1: Esquema primer modelo simplificado

4. Supongan que hay  $45^\circ$  de inclinación entre la recta vertical (respecto de la Tierra) y el rayo de luz, y que la estrella  $E$  está a una gran altura respecto de nuestro planeta.
  - a. Al no contar con la información exacta de la ubicación de la estrella, ¿cómo podrían determinar la ecuación de la recta recién dibujada?
  - b. ¿Qué estrategias podrían seguir? Discutan en el grupo y redacten su mejor aproximación para contestar las preguntas.
5. ¿Podrían determinar la ecuación vectorial de este rayo? ¿Con qué datos necesitan contar? Discutan en el grupo.
  - a. ¿Qué punto conocen que pase por el rayo de luz? Indiquen sus coordenadas.
  - b. Según su modelo gráfico, ¿cuál es el vector posición para este punto que conocen? Expliquen de forma visual lo que se está haciendo.
  - c. Determinen las componentes de un vector director  $\vec{e}$  del rayo de la luz, considerando la inclinación de  $45^\circ$ .
  - d. Usando el vector posición de  $P$  y el vector director, escriban la ecuación vectorial del rayo de luz de esta estrella.
  - e. Expliquen cómo se interpreta la ecuación obtenida en el contexto del modelo. Anoten sus conclusiones.

## DETERMINANDO ECUACIONES VECTORIALES SEGÚN UN SEGUNDO MODELO

Se sugiere que trabajen en grupo las siguientes actividades.

Suposición segundo modelo: En lugar de iteradas refracciones de la luz en el aire, se simplifica el modelo geométrico y físico con el supuesto de que se haga una sola refracción.

1. Observen la figura 2. En ella se muestra cómo el rayo de luz incidente de una estrella sufre un cambio de posición al refractarse una vez, debido al aumento del índice de refracción con la densidad del aire.

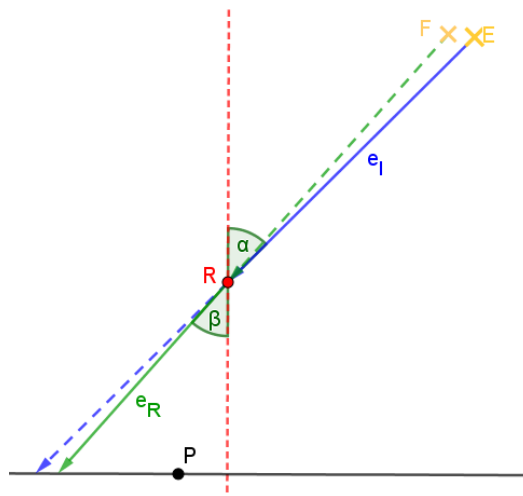


Fig. 2: Esquema segundo modelo simplificado (No a escala)

El ángulo  $\alpha$  es el ángulo entre el rayo incidente (azul) en la capa del aire y la perpendicular (línea punteada en rojo). El ángulo  $\beta$  es el ángulo entre el rayo refractado (verde) y la perpendicular.

En este modelo, se considerará que  $\alpha = 45^\circ$  y que  $\beta = 44,98^\circ$ .

2. Dibujen nuevamente el esquema anterior, ahora en un plano cartesiano.
  - a. ¿Dónde consideran más adecuado ubicar el origen del plano cartesiano? Argumenten su decisión.
  - b. ¿Cómo se interpreta el punto  $R$  en este contexto? Discutan en el grupo y respondan.
  - c. Determinen el vector director de ambos rayos.
  - d. Comparen con otros grupos de trabajo y analicen las diferencias y similitudes que pueda haber en los vectores directores, si el plano cartesiano tiene el origen en un punto distinto al que ustedes eligieron.
3. Consideren que la refracción ocurre a 5 km de altura y a 2 km horizontalmente, desde donde se ha ubicado el observador.
  - a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto  $R$ ? Discutan en el grupo y respondan.
  - b. ¿Cuál es el vector posición del punto  $R$ ? Discutan y respondan.
  - c. ¿Cuál es la ecuación vectorial de los rayos del modelo? Discutan y respondan.

4. Las ecuaciones son muy similares entre sí, ¿a qué se debe? Expliquen.
  - a. En el contexto, ¿a qué se debe específicamente la diferencia en ambas ecuaciones? Discutan y respondan.
  - b. Matemáticamente, ¿cómo se observa la diferencia entre ambas ecuaciones en el gráfico? Expliquen.
5. Supongan que una estrella está ubicada a  $d = 6\,000\,000\,000$  km aproximadamente respecto del punto  $R$ .
  - a. ¿Cómo variarían las ecuaciones vectoriales obtenidas anteriormente? Discutan y respondan.
  - b. De acuerdo con el contexto del problema, ¿cuál sería la posición en la que un observador vería dicha estrella? Discutan y respondan.

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. La propuesta de esta actividad se centra en que apliquen las ecuaciones vectoriales para modelar un fenómeno de la naturaleza. Además, se propone que los estudiantes transiten de una situación muy simplificada a una más compleja para que noten que un fenómeno se puede abordar de ese modo y no se requiere estudiarlo de inmediato con todas las variables interactuando.
2. El modelo propuesto está muy simplificado para que los alumnos puedan centrarse en determinar la ecuación vectorial de forma sencilla, pero con sentido. Después se añade algo de dificultad, pero de todos modos muy por debajo del fenómeno real. Como se ha adaptado las consideraciones físicas del contexto, puede ser un desafío continuar con una discusión más profunda al respecto en las próximas clases.
3. Aunque se muestra un camino para determinar uno de los ángulos, usando el índice de refracción, se sugiere dar los valores de los dos ángulos involucrados; en todo caso, el profesor decide qué nivel de profundidad propiciará en clases y cuánto es lo que se puede pedir sobre el tema de refracción, incluyendo o simplificando el sentido físico que tiene o desarrollando otros problemas.
4. El uso del plano cartesiano es fundamental, ya que es el camino para expresar las ecuaciones de las rectas buscadas en su forma vectorial. Se propone que los jóvenes discutan sobre la mejor opción para ubicar el plano, pero de todos modos conviene que lleguen a consensos.
5. En el caso del segundo modelo, se puede hacer una variante y pedirles que determinen la medida del ángulo  $\beta$ , usando información sobre el índice de refracción; ello da una orientación más física al estudio del modelo. El índice  $n$  de refracción se representa por la expresión  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ . Con  $n = 1,0002$  y un ángulo  $\alpha = 45^\circ$  del rayo incidente, se calcula  $\sin \beta = \frac{\sin 45^\circ}{1,0002}$ , por lo que  $\beta = 44,98^\circ$ .
6. A medida que el modelo real se torna más complejo, se puede usar GeoGebra para comprender gráficamente la situación. Además, la herramienta de vectores permite trabajar con las componentes y compararlas.
7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Representan situaciones de movimiento, utilizando vectores y operatoria entre ellos de forma pictórica y simbólica.
  - Relacionan medidas angulares, la dirección del vector y el desplazamiento, utilizando el modelo vectorial.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- GeoGebra en línea  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/classic?lang=es>
- Para profundizar en el estudio de la refracción  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/snell/snell.htm>

## Actividad de Evaluación

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 1.** Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Indicadores de evaluación

- Representan situaciones de movimiento, utilizando vectores y operatoria entre ellos de forma pictórica y simbólica.
- Relacionan medidas angulares, la dirección del vector y el desplazamiento, utilizando el modelo vectorial.
- Relacionan isometrías y homotecias con vectores para describir y dar soluciones a una situación en forma simplificada.

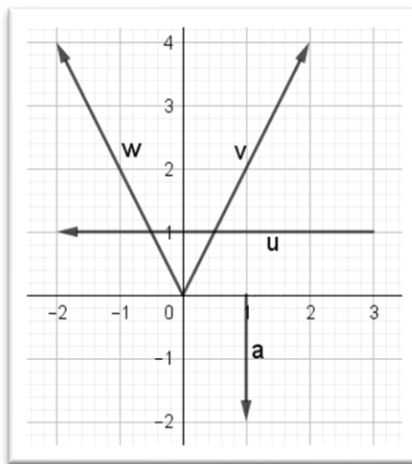
**Duración:** 6 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1, cada una por sí misma o en conjunto. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible.

## VECTORES, OPERACIONES CON VECTORES Y COMPONENTES

1. Encontrar coordenadas de vectores de forma gráfica y algebraica:
  - a. Encuentra las coordenadas del vector  $\vec{b}$ , cuyo punto inicial es  $(12; 50)$  y su punto terminal es  $(-24; -25)$ .
  - b. Si el vector  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$  tiene como punto inicial  $(0; 8)$ , ¿cuáles son las coordenadas del punto terminal? Explica cómo respondes a esta pregunta, argumentando con tus conocimientos previos.

- c. ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores graficados en el plano cartesiano? Explica.



- Encontrar y representar los siguientes vectores:
  - $\vec{v} + \vec{w}$ ;  $\vec{a} + \vec{u}$ ;  $\vec{v} - \vec{w}$
  - $2\vec{u}$ ;  $-\vec{a}$ ;  $2(\vec{w} - \vec{a})$
- Determinar las componentes de los vectores en los ejes cartesianos:
  - Si se conoce la longitud (módulo) de un vector  $\vec{p}$  y su dirección  $\theta$  respecto del eje  $X$ , ¿cómo se expresa el vector  $\vec{p}$  en sus componentes?
  - Escribe lo anterior en términos de sus componentes en el eje  $X$  y en el eje  $Y$ .

### REFLEXIÓN USANDO VECTORES Y COMPARACIÓN CON LA HOMOTECIA VECTORIAL

- En el plano cartesiano, dibuja un triángulo de vértices  $A(1; 2)$ ,  $B(3; 0)$  y  $C(-1; -1)$  y luego refléjalo según la recta  $x = 4$ .
- En el plano cartesiano anterior, dibuja el vector de menor módulo posible que parta de un punto sobre la recta  $x = 4$  y cuyo punto terminal llegue al vértice  $A$ . Nombra  $\vec{u}$  al vector
  - De manera análoga, dibuja los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  que lleguen a los puntos  $B$  y  $C$ , respectivamente.
  - En el mismo plano, dibuja ahora los vectores  $-\vec{u}$ ,  $-\vec{v}$  y  $-\vec{w}$ .
  - Señala una forma de obtener una figura que sea reflejo de otra, usando vectores. Argumenta con un dibujo y luego de forma simbólica, utilizando proposiciones sobre vectores.
  - ¿Cómo son entre sí los vectores que van desde la recta hacia cada vértice? ¿Cuál es el factor por el cual se multiplica cada vector para obtener el punto imagen o punto homólogo?
  - ¿Desde dónde (qué punto) parte cada vector usado para hacer la reflexión? Señala.
- Aplica una homotecia al triángulo  $\Delta ABC$ , con factor de homotecia  $k = -1$  y con centro de homotecia en el punto que estimes conveniente.
  - A partir de las respuestas anteriores, compara la reflexión, usando vectores con la homotecia de una figura. ¿Cuáles son las similitudes y las diferencias? Responde con un dibujo ejemplificador.



- b. Señala una diferencia relevante entre una transformación isométrica, como la reflexión, y la homotecia vectorial. Argumenta apoyándote en esquemas y ejemplos utilizados anteriormente.
4. En el plano cartesiano anterior, dibuja el vector de menor módulo posible que parta de un punto sobre la recta  $x = 4$  y cuyo punto terminal llegue al vértice  $A$ . Nombra al vector  $\vec{u}$ .
- De manera análoga, dibuja los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  que lleguen a los puntos  $B$  y  $C$ , respectivamente.
  - En el mismo plano, dibuja ahora los vectores  $-\vec{u}$ ,  $-\vec{v}$  y  $-\vec{w}$ .
  - Señala una forma de obtener una figura que sea reflejo de otra, usando vectores. Explica a tu compañero el argumento que usaste en este caso o mediante dibujos.
  - ¿Cómo son entre sí los vectores que van desde la recta a cada vértice? ¿Cuál es el factor por el cual se multiplica cada vector para obtener el punto imagen o punto homólogo? Explica a tu compañero y redacten una explicación consensuada.
  - ¿Desde dónde (qué punto) parte cada vector usado para hacer la reflexión?
5. Aplica una homotecia al triángulo  $\triangle ABC$ , con factor de homotecia  $k = -1$  y con centro de homotecia en el punto que estimes conveniente.
- A partir de las respuestas anteriores, compara la reflexión, usando vectores con la homotecia de una figura. ¿Cuáles son las similitudes y las diferencias?
  - Señala una diferencia relevante entre una transformación isométrica, como la reflexión, y la homotecia vectorial.

### VECTORES Y SUS COMPONENTES EN LOS EJES DEL PLANO CARTESIANO.

1. Un avión se encuentra volando a una altura de 10 000 metros. En un tramo, la velocidad del viento es de  $88 \frac{km}{h}$  en dirección noreste de  $30^\circ$ . A esa altura, el avión va a una velocidad de  $850 \frac{km}{h}$  respecto del aire. La dirección del avión es  $45^\circ$  noreste.
- Dibujen la situación anterior en un plano cartesiano, indicando los vectores asociados a la velocidad del viento y a la velocidad del avión.
  - ¿Qué creen que significa que la velocidad del avión es respecto del aire? ¿Por qué no es respecto de la tierra? ¿Cuál sería la diferencia? Discutan en el grupo y respondan.
  - Expresen los vectores de las velocidades en forma de sus componentes en el eje  $X$  y en el eje  $Y$ . ¿Cómo lo hicieron?
  - Determinen la verdadera velocidad del avión y su dirección respecto del aire.
  - Representen, de forma manual o digital, la situación anterior con los tres vectores involucrados.
  - Cambien el vector de la velocidad del viento al sentido contrario, ¿por qué escalar deben multiplicar el vector para invertir el sentido? Argumenten.
  - ¿Cómo se modifica la velocidad del avión respecto del aire con este nuevo vector de velocidad del viento? Argumenten.
  - Consideren el viento en la misma dirección y sentido que la velocidad del avión, ¿en cuánto varía la velocidad verdadera del avión en este caso? Discutan en el grupo y respondan.

**ECUACIONES VECTORIALES**

1. Consideren una recta en el plano cartesiano que pasa por el punto  $A(1; -2)$  y, además, un vector de dirección  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Con estos datos se puede encontrar dicha recta. Para ello:
  - a. Usando un plano cartesiano, marquen el punto  $A$  y dibujen  $\vec{u}$  en algún lugar del plano.
  - b. Dibujen una recta que contenga al vector dibujado. ¿La recta pasa por  $A$ ? Discutan y respondan.
  - c. Dibujen el vector que tiene como punto inicial el origen del plano cartesiano y como punto terminal, el punto  $A$ .
  - d. Establezcan la ecuación vectorial  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u}$ , donde  $B(x; y)$  es otro punto de la recta buscada y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - e. ¿Cuál es la ecuación de la recta vectorial buscada? Discutan y respondan.
  - f. ¿Cuál es la dirección de la recta encontrada? Compárenla con la dirección del vector  $\vec{u}$ . Discutan y respondan.
  
2. Ahora, grafiquen en un plano cartesiano una recta que pase por los puntos  $A(3; -1)$  y  $B(-2; -2)$ .
  - a. Determinen la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos (háganlo de la forma “tradicional”).
  - b. Ahora determinen la ecuación de la recta vectorial.
  - c. Comparen ambas ecuaciones. Geométricamente, ¿qué interpretación tiene cada ecuación? ¿En qué casos hay que usar cada una? Discutan y argumenten su respuesta.

**PAUTA DE EVALUACIÓN**

Criterios de evaluación	Niveles de logros		
	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Representan y argumentan adiciones y sustracciones de vectores, en forma gráfica y algebraica.			
Resuelven problemas que involucran el producto de un vector por un escalar y lo representan en el plano cartesiano.			
Resuelven problemas de isometrías y homotecias, usando vectores y recursos digitales.			
Construyen y evalúan estrategias para resolver problemas que involucran el modelo vectorial para representar fenómenos.			
Justifican el planteamiento de conjeturas y su validez al resolver problemas que involucran el modelo vectorial para representar fenómenos.			
Resuelven problemas que involucren ecuaciones vectoriales.			

# Unidad 2

## Unidad 2: Rectas y planos en el espacio

### Propósito

Los estudiantes desarrollan su imaginación espacial con una mayor abstracción acerca de situaciones espaciales, y reconocen qué conceptos geométricos se mantienen desde la geometría 2D a la geometría 3D. Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos, en el sistema cartesiano espacial de coordenadas. Determinan la intersección entre rectas y también entre planos, y transforman de la representación vectorial a la representación cartesiana. Algunas preguntas que pueden orientar el desarrollo de esta unidad son: ¿Cómo se interpreta una situación representada por una recta en el plano? ¿Qué situaciones se puede representar a partir de las posiciones relativas entre una recta y un plano del espacio?

### Objetivos de Aprendizaje

#### OA 2.

Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

**OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

## Actividad 1: De la geometría plana a la geometría espacial

### PROPÓSITO

Los estudiantes amplían sus conocimientos y habilidades desde la “geometría plana” hacia la “geometría espacial”, y reconocen que se mantienen los conceptos geométricos como ejes, coordenadas y vectores. Además, se espera que utilicen las herramientas disponibles para aumentar su imaginación espacial, resolver problemas y abstraer situaciones espaciales mediante coordenadas en tres dimensiones. Pueden emplear las herramientas y conocimientos disponibles para resolver problemas en el espacio, con énfasis en problemas técnicos que requieren de la posición vectorial, como la posición de objetos en el aire, la tierra o bajo el mar.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

**OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

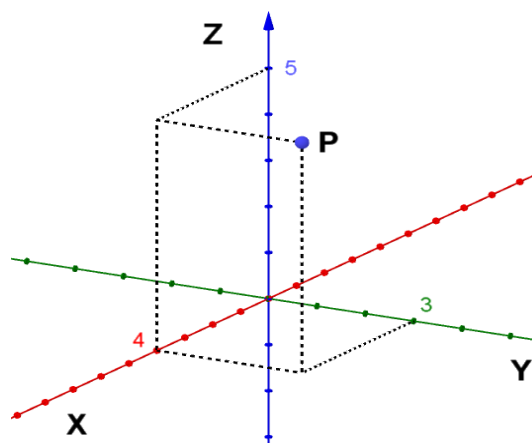
**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

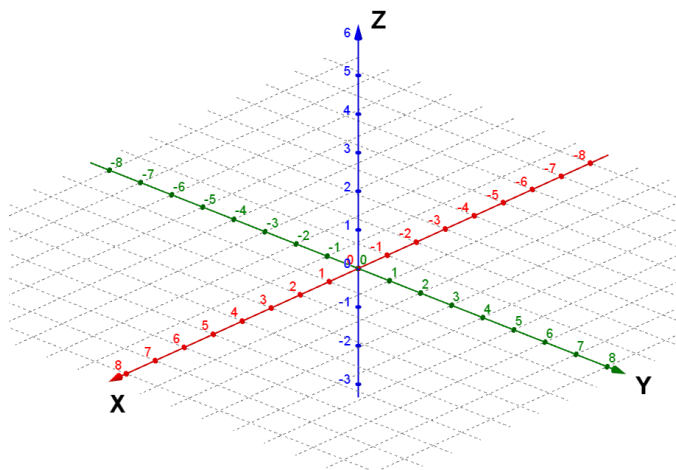
### REPRESENTAR PUNTOS Y VECTORES EN EL SISTEMA CARTESIANO 3D

Para las siguientes actividades, puedes emplear el software GeoGebra 3D; recuerda guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. ¿Cómo se representa los puntos en un sistema cartesiano 3D de coordenadas?
  - a. Señala cuáles son las coordenadas del punto  $P$  en el gráfico. Explica cómo lo hiciste y comprueba con GeoGebra 3D la ubicación en el formato " $P = (x; y; z)$ ".

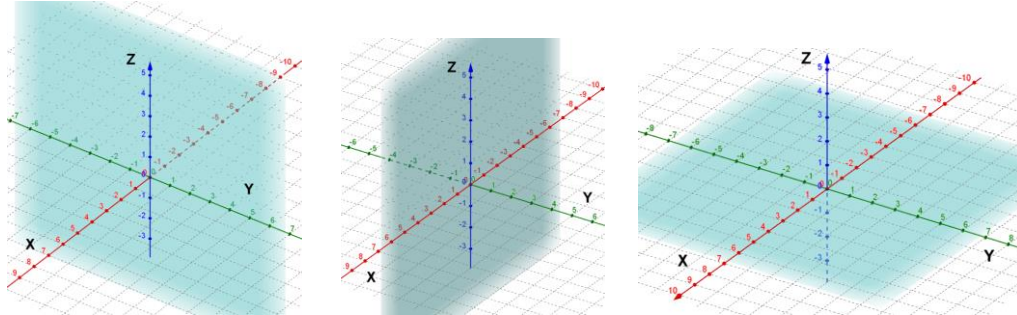


- b. A continuación, ubica los puntos  $A(-4; 3; -5)$ ,  $B(2; -7; 8)$ ,  $C(8; 0; 2)$  y  $D(-8; 2; -1)$ . Explica cómo lo hiciste y comprueba con GeoGebra 3D la ubicación de cada punto, según el formato " $P = (x; y; z)$ ".



## 2. ¿Cómo se identifican los planos en un sistema cartesiano 3D de coordenadas?

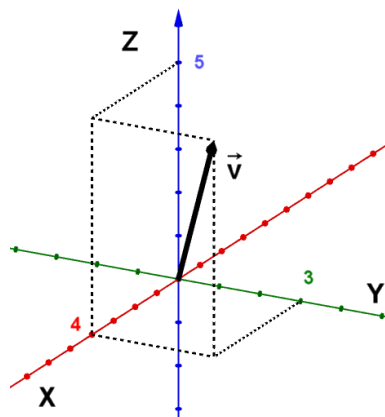
- a. Rotula en el sistema cartesiano de coordenadas 3D en las figuras de abajo: ¿cuáles son el “plano  $xy$ ”, el “plano  $xz$ ” y el “plano  $yz$ ”? Verifica tus elecciones, usando GeoGebra 3D y la herramienta “Plano” para seleccionar dos rectas (en este caso, los pares de ejes involucrados).



- b. Según las gráficas anteriores, ¿cuál debería ser la ubicación en el sistema cartesiano 3D, de puntos de la forma  $P(0; 0; a)$ ,  $Q(b; 0; 0)$  y  $R(0; c; 0)$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales? Explica la manera en que lo pensaste. Comprueba con GeoGebra 3D la ubicación con casos concretos de este tipo de puntos; por ejemplo: “ $P = (0; 0; -2)$ ”.
- c. Según las gráficas anteriores, ¿cuál debería ser la ubicación en el sistema cartesiano 3D, de puntos de la forma  $M(a; 0; a)$ ,  $N(b; b; 0)$  y  $O(0; c; c)$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales? Explica la manera en que lo pensaste. Comprueba con GeoGebra 3D la ubicación con casos concretos de este tipo de puntos; por ejemplo: “ $M = (1; 0; 1)$ ”.

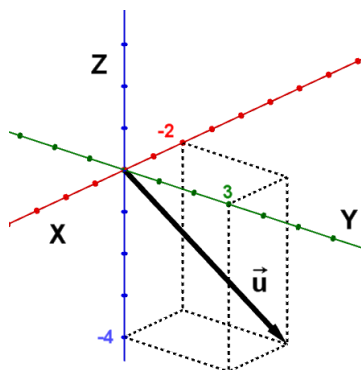
## 3. ¿Cómo se representan los vectores en un sistema cartesiano 3D de coordenadas?

- a. Usando la forma  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , representa el vector  $\vec{v}$  según lo que se muestra en la figura. Comprueba con GeoGebra 3D la ubicación del vector en el sistema cartesiano 3D.

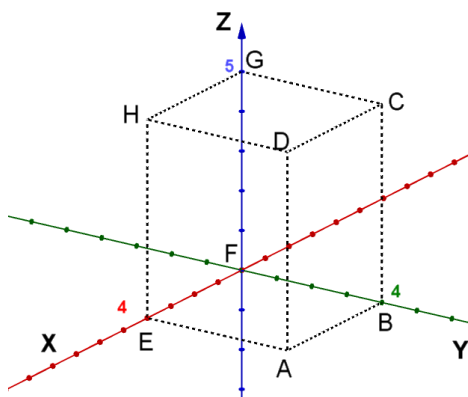




- b. Representa el vector  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  en forma de una columna de coordenadas. Comprueba con GeoGebra 3D la ubicación del vector en el sistema cartesiano 3D.



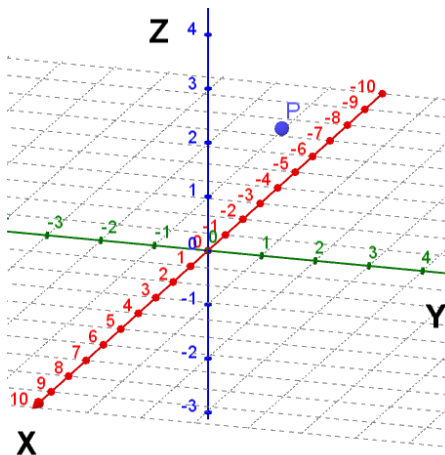
4. En la siguiente figura, el paralelepípedo recto rectangular tiene los vértices A, B, C, D (cara frontal delante) y E, F, G, H (cara frontal detrás).



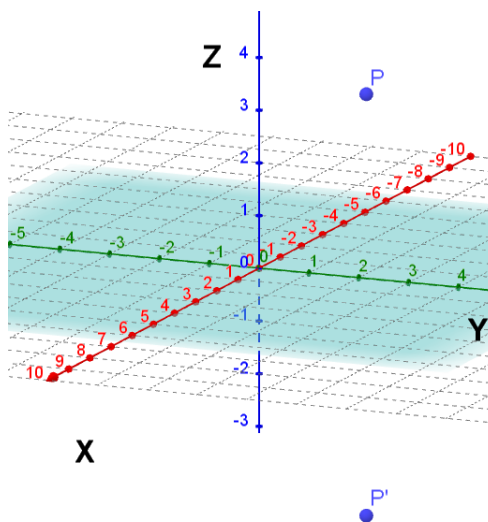
- Identifica los vectores posicionales de los vértices y preséntalos acorde al formato  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Comprueba tus resultados con GeoGebra 3D.
- Determina los vectores que se puede asociar a las diagonales de las caras del paralelepípedo. Comprueba tus resultados con GeoGebra 3D. ¿Coinciden algunos de estos vectores con los establecidos en a.? ¿Por qué?
- Determina aquellos vectores en el paralelepípedo que se puede asociar a diagonales que no pertenezcan a las caras. Comprueba tus resultados con GeoGebra 3D.

## TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS POR MEDIO DE UN SISTEMA 3D DE COORDENADAS

1. ¿Cómo reflejar puntos por medio de planos en el sistema de coordenadas 3D?
  - a. Define las coordenadas de un punto  $P$ ; por ejemplo:  $P = (2; 3; 4)$ . Utiliza GeoGebra 3D para hacerlo.

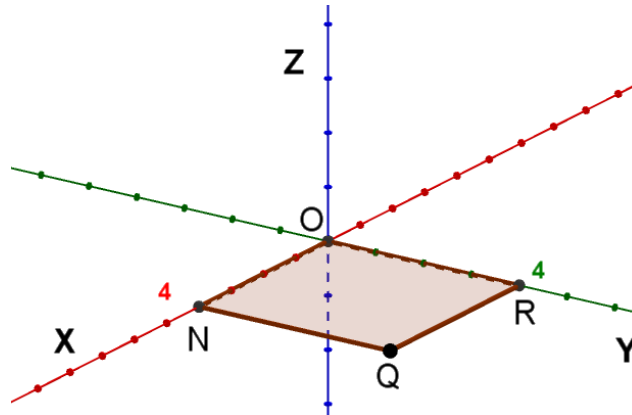


- b. Ahora refleja el punto  $P$  respecto del plano  $xy$ . Usa primero la herramienta “Plano por dos rectas” para definir el plano  $xy$ , marcando el eje  $X$  y el eje  $Y$ . A continuación, utiliza la herramienta “Simetría especular”. Marca el punto  $P$  y luego el plano  $xy$  definido para obtener el punto reflejado  $P'$ . ¿Cuáles son las coordenadas del punto  $P'$  imagen o reflejado? ¿Qué ha cambiado en las coordenadas respecto de  $P$ ?



- c. Repite el procedimiento en GeoGebra 3D, reflejando ahora el punto  $P$  en el plano  $yz$ . ¿Cuáles son las coordenadas del punto  $P'$  imagen o reflejado? ¿Qué ha cambiado en las coordenadas?
  - d. Repite el procedimiento en GeoGebra 3D, reflejando ahora el punto  $P$  en el plano  $z$ . ¿Cuáles son las coordenadas del punto  $P'$  imagen o reflejado? ¿Qué ha cambiado en las coordenadas?

2. ¿Cómo realizar transformaciones isométricas en el sistema de coordenadas 3D? Considera el siguiente rectángulo  $ONQR$ .



- a. Traslada el rectángulo  $ONQR$  por medio del vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ . ¿Cuáles son las coordenadas del rectángulo trasladado o imagen  $O'N'Q'R'$ ? Comprueba tu resultado con GeoGebra 3D, usando la herramienta “traslación”.
- b. Rota el rectángulo  $ONQR$   $90^\circ$  en sentido “antihorario” en torno al segmento  $NO$ . ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen  $O'N'Q'R'$ ? Comprueba tu resultado con GeoGebra 3D, usando la herramienta “rotación axial”.

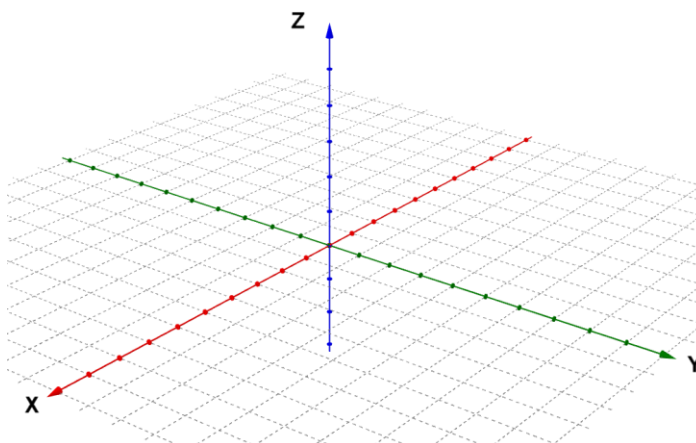
### SITUACIONES DE LA VIDA DIARIA Y EL SISTEMA 3D DE COORDENADAS

1. La torre de control de vigilancia aérea, ubicada en un cerro de la ciudad y operada por drones, tiene en su interior el origen de un sistema de coordenadas espaciales 3D, donde la dirección al norte representa el eje de coordenadas Y. El eje X representa la dirección de oeste al este, y el eje Z representa la dirección vertical hacia arriba. Las coordenadas corresponden a la unidad de metros.
2. En una situación de emergencia, el dron estaba en la ubicación  $U(-300; 2\ 000; 100)$  y el lugar E de la emergencia tiene las coordenadas  $E(500; 1\ 500; -200)$ .

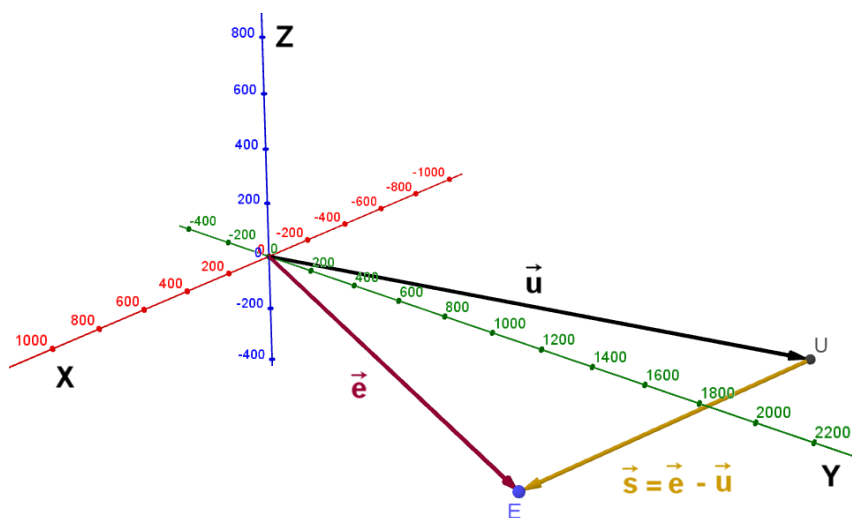


Conexión  
interdisciplinaria:  
Ciencias para la  
Ciudadanía  
OA c, 3° y 4° medio

- a. Representa la situación en un sistema de coordenadas 3D, de modo que te permita modelar de manera más sencilla. Utiliza una escala conveniente según los datos del problema y señala claramente los puntos cardinales.



- b. Representa las ubicaciones de U y E mediante sus vectores posicionales.  
 c. Determina el vector  $\overrightarrow{UE}$  asignado al traslado directo del dron al lugar de emergencia.



3. Representa la dirección del vector  $\overrightarrow{UE}$  mediante un vector  $\vec{s}$  en forma simplificada, con coordenadas de un dígito.  
 4. En otra situación, imagina que el dron se dirige desde su posición actual del lugar de emergencia (E) a una nueva dirección (A), representada por el vector  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Determina el vector  $\overrightarrow{EA}$  de traslado.

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere recordar a los estudiantes que los vectores son un conjunto de puntos y muestran la traslación desde un punto del espacio hasta otro. Por esta razón, las coordenadas de un vector se representan en forma de una columna, en la cual la coordenada superior muestra las unidades de la traslación en dirección X, la coordenada central representa las unidades de traslación en dirección Y, mientras la coordenada inferior considera la traslación en dirección Z.
2. Para acostumbrarse a reconocer objetos según una ubicación tridimensional, se recomienda dibujar puntos y sus vectores posicionales, utilizando líneas punteadas paralelas a los ejes de coordenadas.
3. Se sugiere trabajar con los jóvenes en cómo identificar puntos particulares con dos coordenadas o una de ellas de valor "0", para fomentar aún más la comprensión espacial.
4. A partir de las actividades, se transfiere el concepto de traslaciones o de reflexiones, que ya conocen en la geometría del plano, lo que ayuda a aumentar el manejo de movimientos en el espacio. En general, se transfiere conceptos de la geometría 2D a la geometría 3D para aumentar la imaginación espacial.
5. Conviene usar contextos aplicados como el desplazamiento de drones, pues implica describir en detalle movimientos según coordenadas y vectores, incluyendo posiciones de reposo en el aire, con lo cual se puede modelar situaciones de vigilancia aérea.
6. Cabe precisar que, para las situaciones en contextos de ubicación, se elige el eje X en correspondencia al sentido de la rotación propia de la Tierra (del oeste al este) y la dirección Y correspondiente a la dirección y orientación (al norte) de mapas geográficos. Para la orientación del eje Z, se considera natural elegir la perpendicular hacia arriba.
7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Representan puntos del espacio en el sistema de coordenadas 3D.
  - Generalizan la noción de vector y de operatoria vectorial desde el plano 2D hacia el espacio 3D.
  - Resuelven problemas que involucran la reflexión de puntos respecto de planos.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Coordenadas cartesianas  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.disfrutalasmaticas.com/graficos/coordenadas-cartesianas.html>
- Sistema de coordenadas en el espacio  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://navarrof.orgfree.com/Docencia/MatematicasIV/UT1/sistemas\\_de\\_coordenadas.htm](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://navarrof.orgfree.com/Docencia/MatematicasIV/UT1/sistemas_de_coordenadas.htm)

## Actividad 2: Rectas y planos en el espacio

### PROPÓSITO

Se pretende que los estudiantes caractericen planos y rectas en el sistema 3D mediante sus diferentes ecuaciones y los representen gráficamente en forma manual y con herramientas digitales. Además, se espera que modelen situaciones mediante intersecciones de rectas y de planos, y que trabajen colaborativamente para resolver problemas.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

**OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

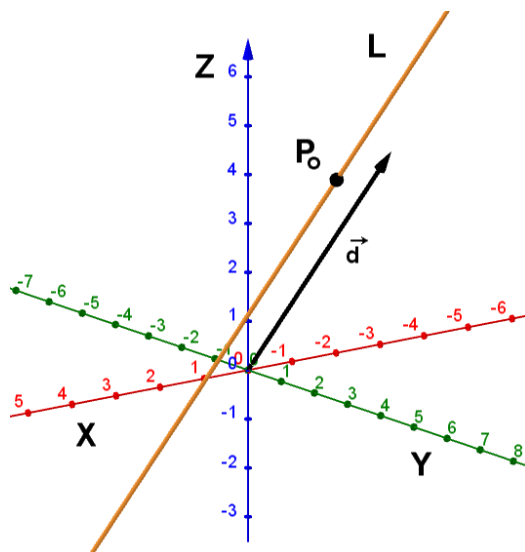
### ECUACIONES VECTORIALES DE RECTAS EN EL ESPACIO

Se sugiere que trabajen las siguientes actividades en forma grupal.

Pueden emplear el software GeoGebra 3D; recuerden guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. Considerando un punto  $P_0(1, 4, 5)$  de una recta  $L$  y un vector director  $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , determinen una ecuación vectorial de la recta  $L$ .
  - a. Ingresen el punto  $P_0 = (1; 4; 5)$  en GeoGebra 3D.
  - b. A continuación, definan el punto  $D = (-1; 3; 5)$ .
  - c. Establezcan ahora el vector  $\vec{d}$  asociado al punto D como “Vector (D)”.

- d. Usando la herramienta “recta paralela por un punto y según dirección de un vector” de GeoGebra 3D, determinen la recta  $L$  que pasa por  $P_0 = (1; 4; 5)$  y que sea paralela al vector  $\vec{d}$ .

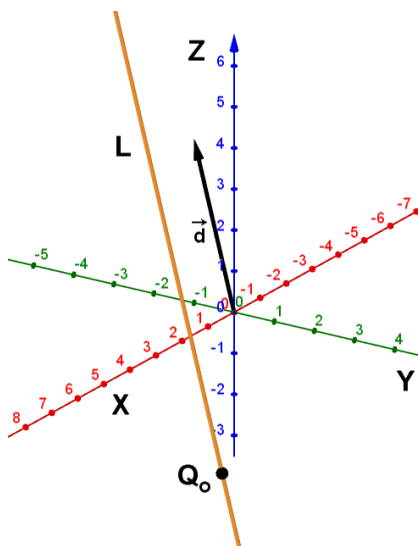


- e. ¿Cuál es la ecuación que GeoGebra 3D asigna a  $L$ ? Completen:

$$(x; y; z) = ( \quad ; \quad ; \quad ) + \lambda ( \quad ; \quad ; \quad )$$

- f. ¿Qué representa el factor  $\lambda$  asociado al vector director  $\vec{d}$ ? Discutan en el grupo y argumenten la respuesta.

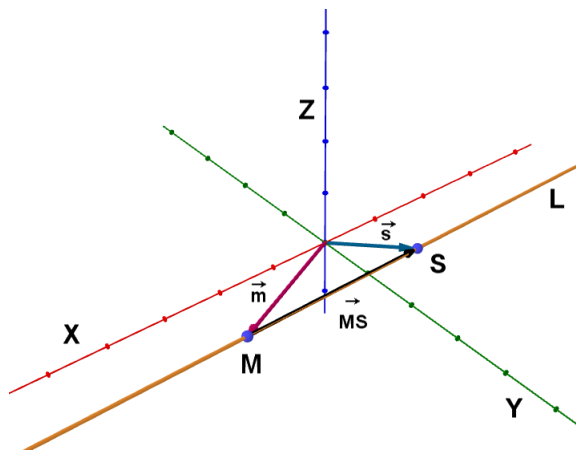
2. Según lo anterior, ¿cuál sería la ecuación de la recta que pasa por el punto  $Q_0(2; 1; -3)$  de una recta  $L$  y un vector director  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ? Completen  $(x; y; z) = ( \quad ; \quad ; \quad ) + \lambda ( \quad ; \quad ; \quad )$  y comprueben con GeoGebra 3D.



3. ¿Cuál sería la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos  $M(3; 2; 1)$  y  $S(-1; 1; 0)$ ?
- Determinen las coordenadas del vector  $\overrightarrow{MS}$ . Discutan la forma de hacerlo.
  - Tomen como vector director  $\overrightarrow{MS}$  y uno de los puntos; por ejemplo:  $M(3; 2; 1)$ .
  - A continuación, anoten la ecuación vectorial de la recta:

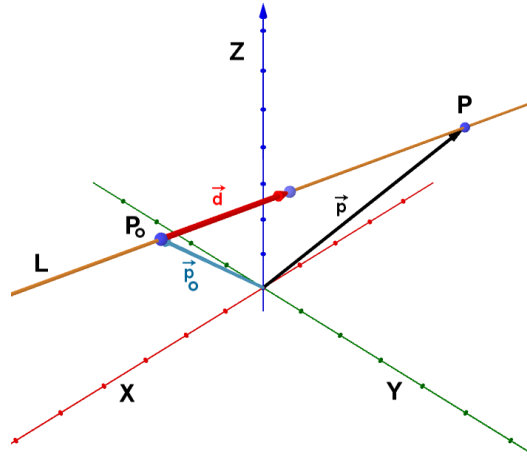
$$(x; y; z) = ( \quad ; \quad ; \quad ) + \lambda ( \quad ; \quad ; \quad )$$

- Comprueben su resultado con GeoGebra 3D. Consideren los vectores posicionales para  $M(3; 2; 1)$  y  $S(-1; 1; 0)$ . Discutan cómo, en el gráfico, el vector director  $\overrightarrow{MS}$  coincide en dirección con la recta  $L$  y cómo este vector se define a partir de los vectores posicionales de  $M$  y  $S$ .





4. Desarrollen la ecuación vectorial de una recta en el espacio, según la imagen de abajo. Discutan en el grupo y argumenten la forma en que la hicieron.



- a. Con la recta  $L$ , el punto fijo  $P_0(x_0; y_0; z_0)$ , el vector director definido  $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$  y el punto  $P(x; y; z)$ , que resulta cuando se da un cierto valor al parámetro  $\lambda$ , determinen en general la ecuación vectorial de la recta  $L$ :

$$(x; y; z) = ( \quad ; \quad ; \quad ) + \lambda ( \quad ; \quad ; \quad )$$

$$P = \underline{\hspace{2cm}} + \lambda \underline{\hspace{2cm}}$$

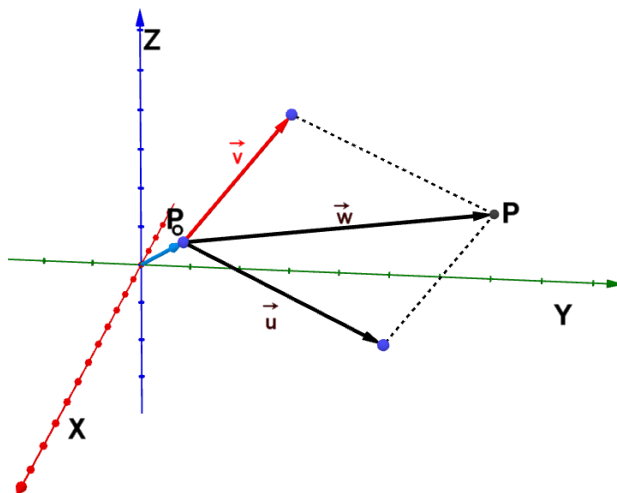
- b. Con referencia a la imagen anterior, ¿cuál es aproximadamente el parámetro  $\lambda$  mediante el cual se logra la traslación del punto  $P_0$  al punto  $P$ ? En otras palabras, ¿por cuánto hay que multiplicar al vector director? Discutan en el grupo y redacten su respuesta.
- c. Considerando la ecuación vectorial de la recta  $L$  que pasa por el punto  $Q_0(1; 4; 5)$  y el vector director  $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , ¿qué vector posicional  $\vec{u}$  de un punto  $U$  se genera, reemplazando el parámetro  $\lambda = -2$  en la ecuación vectorial de dicha recta  $L$ ? ¿Cuáles son las coordenadas del punto  $U$ ? Discutan en el grupo y redacten su mejor aproximación para contestar las preguntas.
- d. ¿Mediante cuál parámetro  $\lambda$  se genera el vector posicional  $\vec{w}$  que traslada el punto  $Q_0(1; 4; 5)$  al punto  $W(-3; 16; 25)$ ? Argumenten.

## ECUACIONES VECTORIALES DE PLANOS EN EL ESPACIO

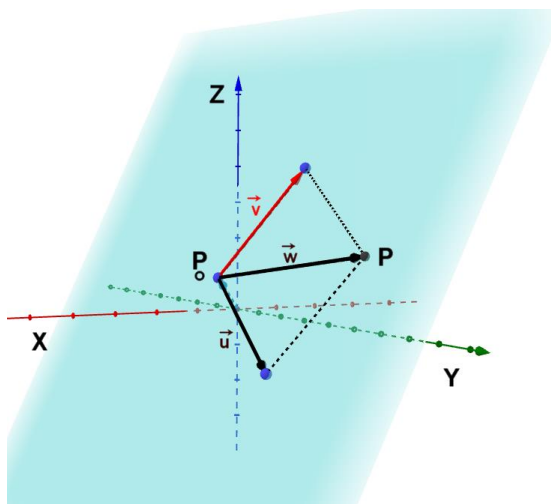
1. Imagina que el punto  $P_0(1; 1; 1)$  y los vectores  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  y  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  pertenecen al plano  $F$ .

Determinen una ecuación vectorial del plano  $F$ . Usen GeoGebra 3D.

- Ubiquen el punto  $P_0$  en el sistema coordenado 3D.
- A continuación, proyecten los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  desde el punto  $P_0$ .
- Establezcan la resultante de la suma entre los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

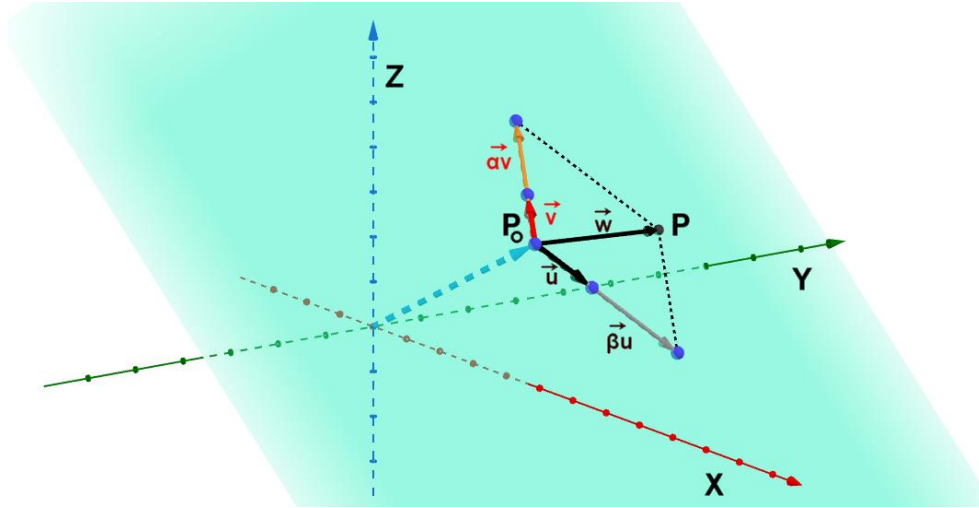


- Marquen el punto  $P$  encontrado. ¿Pertenece al Plano  $F$ ? Discutan con el grupo. Verifiquen con GeoGebra y la opción "Plano por 3 puntos".

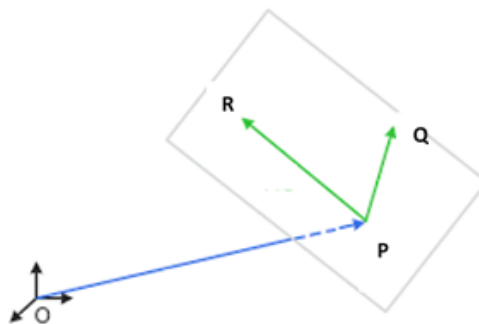


- ¿Qué sucede si se multiplican los vectores por escalares  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente? ¿Qué significan las expresiones  $\alpha\vec{u}$  y  $\beta\vec{v}$ ?
- ¿Se podría encontrar otros puntos pertenecientes al mismo plano  $F$ ? ¿Por qué?

2. Desarrollen la ecuación vectorial de un plano en el espacio, a partir de un punto P perteneciente al plano y dos vectores de traslación dados, según la imagen de abajo.

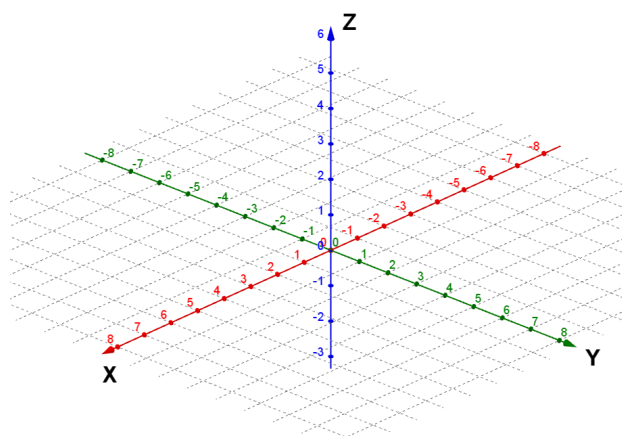


- El punto  $P_0(x_0; y_0; z_0)$  pertenece a un plano  $E$  y los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  representan traslaciones de puntos en  $E$ . Si un punto cualquiera  $P(x, y, z)$  también pertenece al plano  $E$ , determinen una ecuación vectorial del plano  $E$  a partir de la información anterior.
  - El punto  $P(1; 3; 2)$  y los vectores  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$  y  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$  pertenecen al plano  $F$ . Determinen una ecuación vectorial del plano  $F$ .
  - Determinen el punto Q del plano F para los parámetros  $\alpha = -1$  y  $\beta = 2$ .
  - Un plano  $H$  tiene la ecuación vectorial  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Verifiquen si el punto  $A(-1; -3; -1)$  pertenece al plano  $H$ .
3. ¿Cómo obtener la ecuación vectorial de un plano en el espacio 3D, a partir de tres puntos que pertenecen a él?



- Desarrollen una ecuación vectorial según la imagen anterior.

- b. Confeccionen un dibujo esquemático con el vector posicional del punto P y desarrollen una ecuación vectorial del plano. Discutan con el grupo cómo abordarán el problema.
- c. Dados los tres puntos  $A(2; 0; 3)$ ,  $B(1; -1; 5)$  y  $C(3; -2; 0)$  que pertenecen a un plano  $E$ , determinen dos ecuaciones de  $E$  con diferentes vectores posicionales elegidos. ¿Es posible hacerlo? ¿Por qué? Discutan con el grupo cómo abordarán el problema.
4. ¿Cómo se obtiene la ecuación vectorial de un plano en el espacio, cuando se tiene tres puntos especiales?
- a. Si  $a$  es un número real, razonen acerca de la ubicación de los siguientes puntos en el sistema cartesiano 3D:  $A(0; a; 0)$ ,  $B(0; a; a)$  y  $C(a; a; 0)$ , y describan el plano que determinan.
- b. En el sistema cartesiano 3D de coordenadas, marquen los puntos  $K(4; 0; 0)$ ,  $L(0; 4; 0)$  y  $M(0; 0; 4)$ , y desarrollen una ecuación vectorial del plano  $E$  al que pertenecen estos puntos.



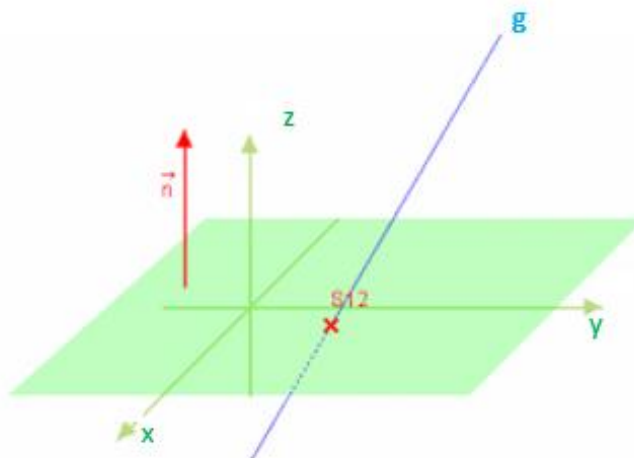
- c. ¿Qué características deberían tener tres puntos P, Q, y R que pertenecen a un plano  $F$  paralelo al plano  $E$ ? Discutan con el grupo y elaboren una respuesta.

### SITUACIONES MODELADAS POR RECTAS Y PLANOS

Se sugiere que trabajen las siguientes actividades en forma grupal.

1. ¿Cómo enfrentar situaciones que involucran planos con características especiales en el sistema cartesiano 3D de coordenadas? Elaboren un dibujo esquemático para cada actividad.
- a. ¿Qué plano representa la siguiente ecuación vectorial?  $\vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ .  
Argumenten la respuesta con una imagen esquemática.
- b. Elaboren una ecuación vectorial de un plano paralelo (no idéntico) al “plano xz” del sistema cartesiano 3D de coordenadas. Expliquen el procedimiento.
- c. Elaboren una ecuación vectorial de los dos planos paralelos al “plano xy” del sistema cartesiano 3D, que tengan una distancia de éste de tres unidades. Expliquen el procedimiento.
- d. Elaboren una ecuación vectorial de los dos planos paralelos al plano “yz” del sistema cartesiano 3D, que tengan una distancia de éste de cinco unidades. Expliquen el procedimiento.

2. ¿Cómo determinar intersecciones de rectas con planos paralelos a los “planos de coordenadas”?  
¿Qué características poseen estas intersecciones?

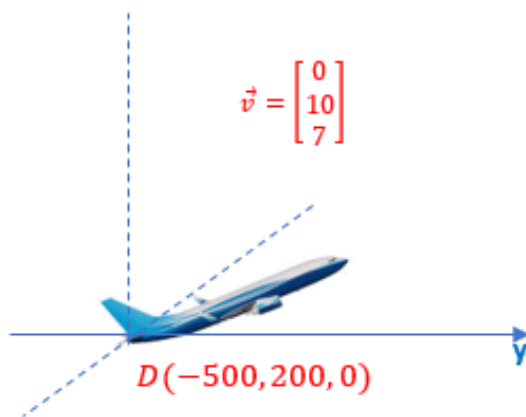


- a. Determinen el punto  $S$  de intersección de la recta  $g$  con la ecuación  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$  y el “plano de coordenadas  $xy$ ”. (Elaboren la ecuación vectorial de este plano en su forma más sencilla).
- b. Determinen el punto  $T$  de intersección de la recta  $g$  con un plano paralelo al “plano de coordenadas  $xy$ ” en la distancia de cinco unidades. (Elaboren la ecuación vectorial de este plano paralelo en su forma más sencilla).
3. Modelar situaciones de seguridad en el transporte aéreo, mediante intersecciones de rectas geométricas con planos geométricos que están paralelos a los “planos de coordenadas”.

En el dibujo esquemático a continuación, se muestra un avión en el momento del despegue. Las coordenadas del punto  $D$  del despegue, medidas en metros, se refieren a un sistema de coordenadas cuyo origen  $O$  es la torre del aeropuerto. El vector  $\vec{v}$  de la dirección del vuelo también se refiere a metros y la dirección del eje  $y$  está de norte sur.



a



Conexión  
interdisciplinaria:  
Ciencias para la  
Ciudadanía  
OAc, 3° y 4° medio

- En una altura de 3 000 m, el avión pasa las nubes y entra en un espacio aéreo despejado. Determinen este lugar  $L$  en referencia al sistema de coordenadas cuyo origen es la torre.
  - En esta fase del vuelo, se considera un movimiento rectilíneo uniforme ("MRU"). ¿Cuál es el largo del desplazamiento al pasar por el punto  $L$ ?
  - En otra fase del vuelo, el avión ya está en una altura de 5 000 m y vuela con velocidad constante en una dirección representada por el vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
4. El avión debe pasar por una cordillera de altura máxima de 5 000 m, que se extiende en la dirección norte-sur (paralela al eje  $y$ ). Como control de altura, la nave debería pasar un plano paralelo al plano  $yz$ , que se extiende a una distancia de 3 000m del avión. Pasando este plano, sigue volando horizontalmente en dirección oeste-este.
- ¿Con qué distancia de seguridad, en cuanto a la altura, el avión pasará la cordillera?
  - Confeccionen previamente un dibujo esquemático para representar y resolver el problema.
  - ¿Por qué la intersección de rectas con planos paralelos a los planos de coordenadas debe anteceder a la intersección con planos inclinados?

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere tratar las situaciones en detalle y con varios ejemplos, ya que es la primera vez que los jóvenes trabajan de manera integrada con ecuaciones vectoriales de rectas y planos. Conviene que los parámetros usados correspondan a los números reales.
- En cuanto a la contextualización con los vuelos de aviones, las ecuaciones vectoriales geométricas son un modelo de las ecuaciones de movimientos rectilíneos uniformes "MRU".
- Se recomienda emplear herramientas digitales como GeoGebra para que exploren las representaciones que, en general, requieren mucha imaginación espacial. También deben adquirir destreza para confeccionar dibujos esquemáticos, elaborar ecuaciones vectoriales y determinar simbólicamente conjuntos de intersección entre rectas y planos.

4. Para facilitar la elaboración de las ecuaciones vectoriales, se recomienda elegir un sistema de coordenadas en el cual el punto  $P(0; 0; 5\ 000)$  representa la posición del avión que debe pasar por plano paralelo al plano  $yz$ .
5. Para resolver los problemas por métodos algebraicos, finalmente trabajan en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de hasta  $3 \times 3$ . No obstante, el énfasis está principalmente en el trabajo visual con apoyo de GeoGebra 3D.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Representan gráficamente ecuaciones vectoriales de rectas y planos en el sistema de coordenadas 3D.
  - Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos en el espacio.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

### *Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Ecuación vectorial  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.ematematicas.net/eirectaespacio.php?a=6>
- Rectas en espacio de coordenadas 3D  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://aga.frba.utn.edu.ar/recta-en-r3/>
- Ecuaciones de la recta en el espacio  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/recta/ecuaciones-de-la-recta-en-el-espacio.html>
- Tutoriales para trabajar ecuaciones paramétricas de rectas y planos  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=Xu7NsHs9Z9A>  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=CkDxFjGOfBg>

## Actividad 3: Determinar la intersección de rectas con planos y de planos con planos

### PROPÓSITO

Los estudiantes determinan la intersección entre plano y recta y entre dos planos en el espacio, con ecuaciones vectoriales. Reflexionan acerca de la intersección entre dos planos y plano y recta, a partir de las posibilidades del conjunto “solución de sistemas de ecuaciones lineales”. Se espera que usen herramientas digitales para verificar y visualizar los resultados obtenidos mediante el cálculo simbólico y para facilitar la resolución de problemas geométricos más complejos.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

**OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

**Duración:** 18 horas pedagógicas

## DESARROLLO

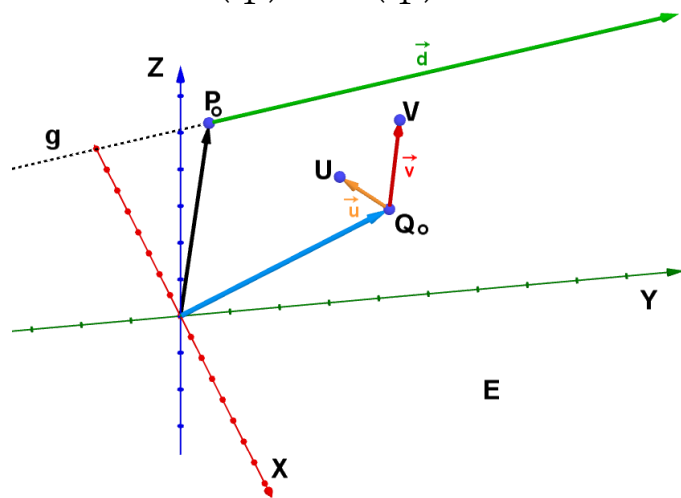
### INTERSECCIÓN ENTRE PLANOS Y RECTAS

Para las siguientes actividades, puedes emplear el software GeoGebra 3D; recuerda guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

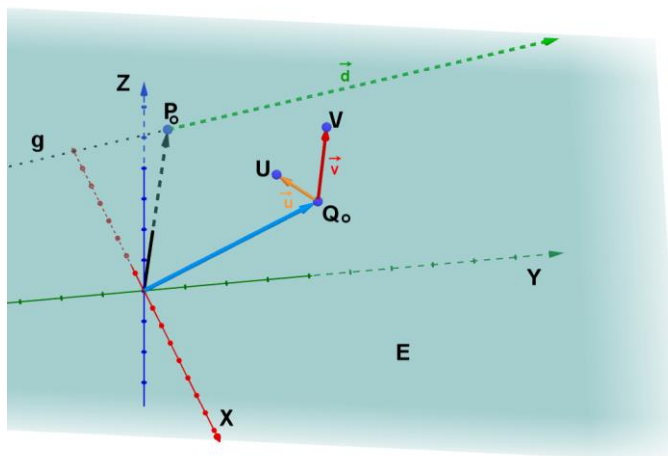


1. ¿Cómo determinar la intersección entre una recta y un plano? Si se tienen las ecuaciones vectoriales de una recta y un plano:  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$  y  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$ , ¿cuál es la intersección entre la recta  $g$  y el plano  $E$ ? Usa GeoGebra 3D para encontrar esta intersección.

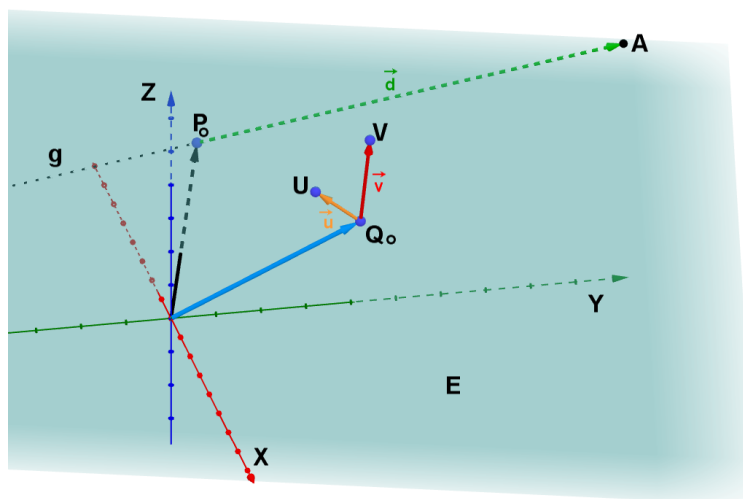
- a. Construye la recta  $g$ . Define en GeoGebra 3D el vector posición  $P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  y luego, a partir de éste, el vector director  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ . Obtén la recta  $g$  con la herramienta “Recta paralela”, considerando  $P_0$  y  $\vec{d}$ .
- b. Construye el plano  $E$ . Define en GeoGebra 3D el vector posición  $Q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  y luego, a partir de éste, los vectores directores  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



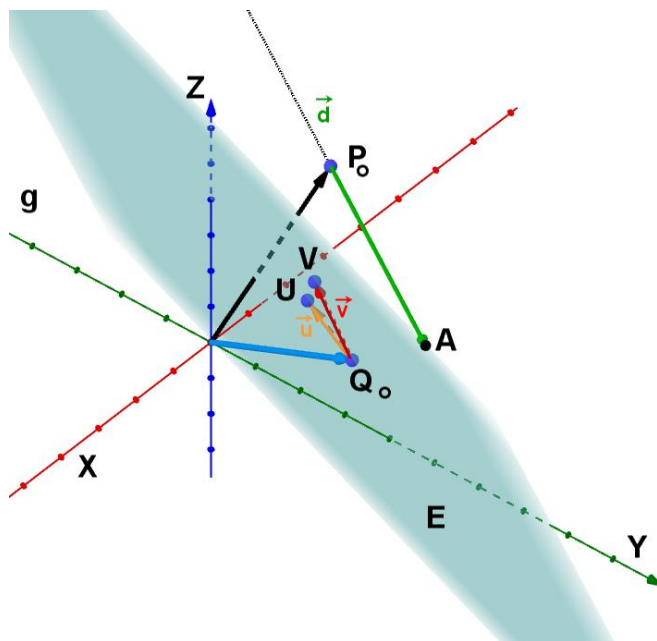
- c. Obtén el plano  $E$  con la herramienta “Plano por tres puntos”, considerando  $U, V$  y  $Q_0$ .



- d. Explora con GeoGebra 3D, usando la herramienta de “rotación” del sistema coordenado 3D, y conjetura acerca de dónde podría estar la intersección del Plano  $E$  con la recta  $g$ . ¿Se trata de un punto o un conjunto de puntos?
- e. Con la herramienta “intersección de objetos”, verifica la intersección de  $g$  y  $E$ . Contrasta tu conjetura con el resultado. Anota aquí el objeto resultado de la intersección:



- f. Utilizando la herramienta de “rotación” del sistema coordenado 3D, verifica el conjunto solución.



- g. Finalmente, ¿de qué manera se puede encontrar la solución anterior mediante procedimientos algebraicos?

2. Considera ahora que una recta  $h$  tiene la ecuación  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$  y el mismo

plano anterior  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$ .

- Conjetura si la recta  $h$  interseca o no el plano  $E$ .
  - Verifica o rechaza tu conjetura mediante GeoGebra 3D.
  - ¿Cómo se puede resolver lo anterior mediante procedimientos algebraicos?
3. Considera que otra recta  $l$  tiene la ecuación  $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$  y el mismo plano anterior  $E$ .
- Conjetura si la recta  $h$  interseca o no el plano  $E$ .
  - Verifica o rechaza tu conjetura mediante GeoGebra 3D.
  - ¿Cómo se puede resolver lo anterior mediante procedimientos algebraicos?
4. ¿Cómo determinar la intersección de un plano con los ejes de coordenadas? Por ejemplo: encuentra la intersección del Plano  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$ , con el eje Y.

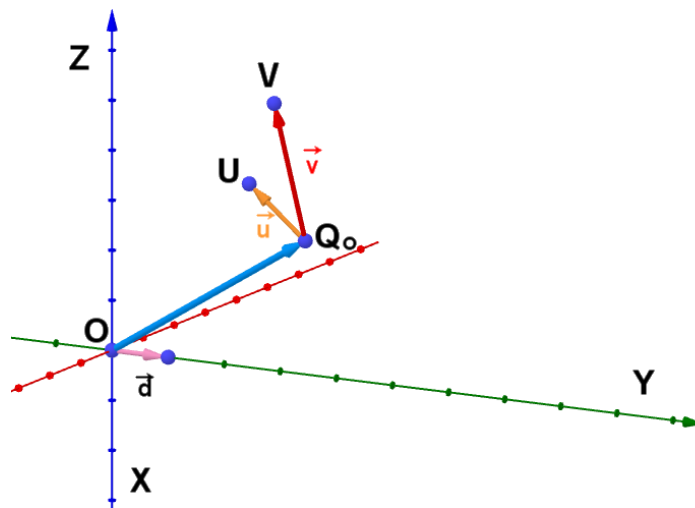
- a. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que representa el eje Y. Identifica el vector posicional y el vector director en este caso:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

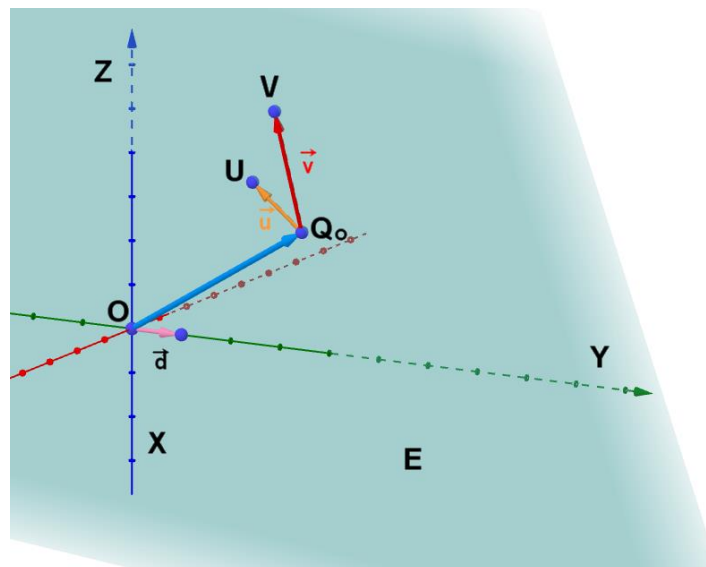
- b. Identifica en GeoGebra 3D, la recta que representa el eje Y.

- c. Construye el plano  $E$ . Define en GeoGebra 3D el vector posición  $Q_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  y luego, a partir

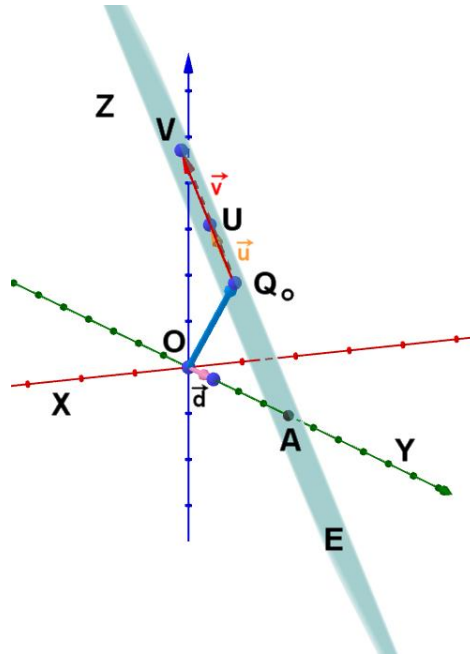
de éste, los vectores directores  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



- d. Obtén el plano  $E$  con la herramienta "Plano por tres puntos", considerando  $U, V$  y  $Q_0$ .



- e. Explora con GeoGebra 3D, usando la herramienta de “rotación” del sistema coordenado 3D, y conjetura acerca de dónde podría estar la intersección del Plano  $E$  con la recta  $g$ . ¿Se trata de un punto o un conjunto de puntos? Argumenta.
- f. Utilizando la herramienta de GeoGebra 3D “intersección de objetos”, verifica la intersección del eje  $Y$  con  $E$ . Contrasta tu conjetura con el resultado. Anota aquí el objeto resultado de la intersección:



- g. ¿Cómo se puede resolver lo anterior mediante procedimientos algebraicos?
- h. Encuentra la intersección del plano  $E$  con las rectas asociadas a los ejes  $X$  y  $Z$ . Comprueba las soluciones con GeoGebra 3D.

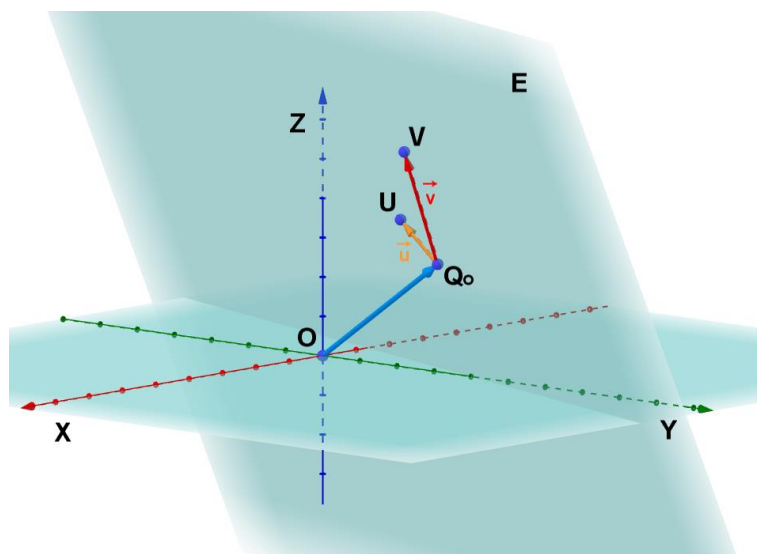
### INTERSECCIÓN ENTRE DOS PLANOS

1. ¿Cómo determinar la intersección entre dos planos? Considera el plano  $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$ , y el Plano  $XY$ .

- a. Escribe la ecuación paramétrica del Plano  $XY$ . Identifica el vector posicional y los dos vectores directores en este caso:

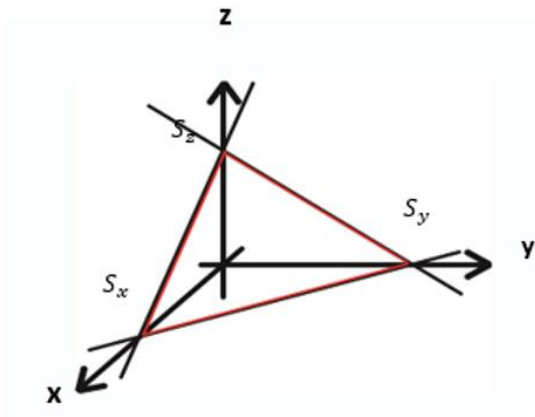
$$\text{Plano } XY: \vec{x} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- b. Construye el plano  $E$ . Define en GeoGebra 3D el vector posición  $Q_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  y luego, a partir de éste, los vectores directores  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- c. Construye el plano  $XY$ . Define en GeoGebra 3D el vector posición  $O = \begin{pmatrix} \phantom{-1} \\ \phantom{4} \\ \phantom{3} \end{pmatrix}$  y luego, a partir de éste, los vectores directores  $\vec{u} = \begin{pmatrix} \phantom{-1} \\ \phantom{4} \\ \phantom{3} \end{pmatrix}$  y  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \phantom{-1} \\ \phantom{4} \\ \phantom{3} \end{pmatrix}$ .
- d. Obtén los planos  $E$  y  $XY$  con la herramienta “Plano por tres puntos”, considerando los vectores posicionales y los vectores directores.



- e. Explora con GeoGebra 3D, usando la herramienta de “rotación” del sistema coordenado 3D, y conjetura acerca de dónde podría estar la intersección de los planos  $E$  y  $XY$ . ¿Se trata de un punto o un conjunto de puntos? Argumenta.
- f. Utilizando la herramienta de GeoGebra 3D “intersección de objetos”, verifica la intersección de los planos  $E$  y  $XY$  y contrasta tu conjetura con el resultado. Anota aquí el conjunto solución:  
\_\_\_\_\_.
- ¿Cómo se puede resolver lo anterior mediante procedimientos algebraicos?
  - Encuentra la intersección del plano  $E$  con los otros planos  $XZ$  e  $YZ$ . Comprueba las soluciones con GeoGebra 3D.

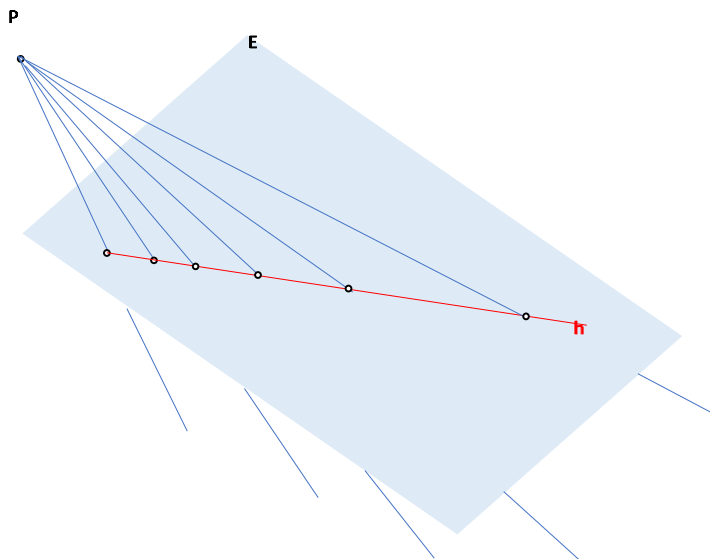
2. Encuentra la intersección del plano  $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; k, l \in \mathbb{R}$ , con cada uno de los planos  $XY$ ,  $XZ$  e  $YZ$ , de forma algebraica.



3. Usa algún programa de geometría dinámica para encontrar las soluciones de la intersección del plano  $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; k, l \in \mathbb{R}$ , con cada uno de los planos  $XY$ ,  $XZ$  e  $YZ$ , y compara con lo obtenido en el ejercicio anterior.

### UNA SITUACIÓN CIENTÍFICA DE OCEANOGRAFÍA Y EL HAZ DE RECTAS EN EL ESPACIO

1. Un haz de rectas  $g_\alpha$  que pasa por un punto  $P$ , intersecciona un plano  $E$  en varios puntos. Determinen la recta  $h$  que une los puntos de intersección de  $g_\alpha$  con  $E$ .



Para cada valor del parámetro  $a$ , se define una recta  $g_a$  mediante la siguiente ecuación vectorial

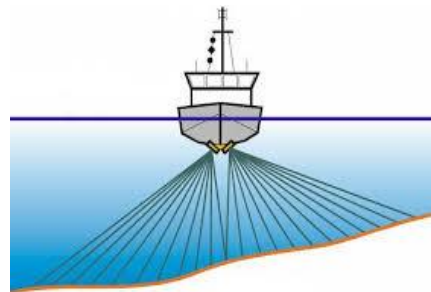
$$g_a: \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 4 + 2a \\ -1 + 5a \\ 1 + 3a \end{bmatrix}; r, a \in \mathbb{R}. \text{ El plano } E \text{ tiene la ecuación vectorial de}$$

$$E: \vec{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } k, l \in \mathbb{R}.$$

Determinen una ecuación vectorial de la recta  $h$  que une los puntos de intersección en el plano  $E$ . Utilicen alguna herramienta digital como apoyo.

2. Modelar el rastreo del fondo marino, hecho con ecosondas abanicas como se muestra en la imagen adjunta.

Un barco científico está investigando la profundidad del mar para elaborar un mapa que represente el perfil del fondo marino, y que sirva tanto para la pesca como para la navegación. Las ecosondas ubicadas en la parte inferior del barco emiten un haz de rayos ultrasónicos que forman un triángulo espacial. El barco está registrando el borde superior de una fosa submarina en el fondo submarino.



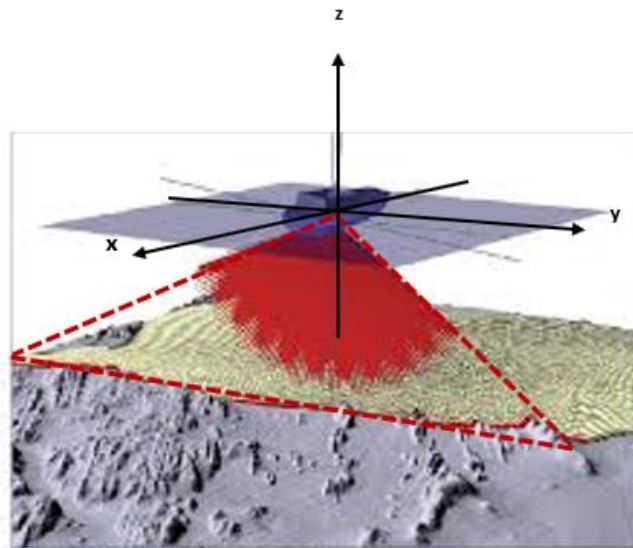
- a. Modelen la situación con un haz de rectas que pasa por un punto bajo los siguientes supuestos:

- El centro del sistema cartesiano 3D de coordenadas se encuentra en el emisor de los rayos ultrasónicos.
- El dibujo es esquemático y las dimensiones del barco no están en relación con la profundidad del mar y otras extensiones reales.
- El plano que está representado por el haz de rectas no está paralelo a plano alguno de coordenadas.
- El fondo submarino está paralelo a la superficie del mar y se conoce la profundidad del fondo del mar. (Estimar libremente).
- El borde de la fosa submarina tiene la forma de una recta y se extiende más por ambos lados del segmento que se investiga.

Conexión  
interdisciplinaria:  
Ciencias para la  
Ciudadanía  
OA c, 3° y 4° medio



- b. Con herramientas digitales, elaboren una ecuación del haz de rayos.



- a. Según los datos de la modelización, determinen la ecuación vectorial de la recta que representa el borde de la fosa.
- b. ¿Por qué se puede modelar las ecosondas con forma de abanico, con ecuaciones vectoriales de planos?

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. En primera instancia, se propone que usen GeoGebra 3D en las actividades, como una manera visual y dinámica de comprender los conceptos asociados a rectas y planos. Se sugiere discutir después algunos métodos algebraicos relacionados con sistemas de ecuaciones.
2. GeoGebra 3D entrega directamente la ecuación paramétrica de una recta en el sistema coordenado 3D, pero no lo hace directamente en el caso de los planos, pues entrega la ecuación cartesiana. Por ello, conviene que los estudiantes construyan paso a paso la ecuación paramétrica, considerando el vector posicional y los dos vectores directores.
3. Para establecer la intersección de un plano con los ejes de coordenadas, en la actividad 4, los alumnos deben verificar que las rectas que pasan por los pares de puntos  $S_x, S_y$ ;  $S_x, S_z$  y  $S_y, S_z$ , determinan las rectas de intersección.
4. Se sugiere dar más espacio para que desarrollen la intersección entre rectas y planos, considerando sus ecuaciones paramétricas. No se pone mucho énfasis en la intersección de dos planos en posición relativa general entre ellos; en cambio, se prefiere trabajar exclusivamente en la intersección de un plano cualquiera con los planos XY, XZ e YZ.
5. Las rectas del haz determinan un plano común y la recta  $h$  representa la intersección de este plano con el plano  $E$ . Para determinar la ecuación de la recta  $h$ , es suficiente establecer dos puntos de ella, que resultan de la intersección con dos rayos.

6. Para determinar la intersección del haz de rayos con el fondo marino, basta con calcular la intersección de dos rayos con el fondo marino.
7. En esta actividad, el énfasis está en la modelización y no en un resultado definido. Por esta razón, se supone un fondo marino plano y de dirección horizontal, para que los cálculos simbólicos no tengan tanta exigencia matemática.
8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - En el sistema de coordenadas 3D, representan gráficamente ecuaciones vectoriales de rectas y planos.
  - Resuelven problemas sobre intersecciones entre una recta y un plano cualquiera, y de un plano cualquiera con los planos  $XY$ ,  $XZ$  e  $YZ$ .
  - Justifican las estrategias y soluciones de problemas, mediante representaciones pictóricas o simbólicas de rectas y planos en el espacio.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

### *Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Rectas y planos

<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/simbolico/geometria/geometria.html>

- Rectas en el espacio

<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/SUPERIOR/algebra-vectorial-planos-rectas/node5.html>

- Ecuación vectorial

<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.ematematicas.net/eirectaespacio.php?a=6>

- Recta y plano: intersecciones y ángulos

<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://aga.frba.utn.edu.ar/recta-y-plano-intersecciones-y-angulos/>

- Proyecto de inspección con sonar de barrido lateral y levantamiento topográfico

[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://catarina.udlap.mx/u\\_dl\\_a/tales/documentos/mgd/carvaja\\_r\\_jo/capitulo6.pdf](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/mgd/carvaja_r_jo/capitulo6.pdf)

## Actividad 4: Resolver problemas que involucran mediciones en el sistema de coordenadas 3D

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes determinen distancias en el espacio, módulos y ángulos entre vectores, de manera visual y con herramientas digitales. Aunque algunas actividades pueden resolverse mediante el producto punto entre vectores, el foco no está puesto en ello, por lo que se sugiere que empleen apoyo tecnológico. Se pretende que resuelvan problemas en contexto, en los cuales se requiera usar puntos, vectores, rectas y planos en el sistema 3D. Para esto, tienen que trabajar colaborativamente y compartir las diferentes habilidades y experticias en conocimiento y habilidades espaciales.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

**OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### PROBLEMAS GEOMÉTRICOS QUE INVOLUCRAN MEDICIONES

Se sugiere que trabajen colaborativamente en las siguientes actividades.

Pueden emplear el software GeoGebra 3D; recuerden guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. ¿Cómo determinar módulos de vectores?

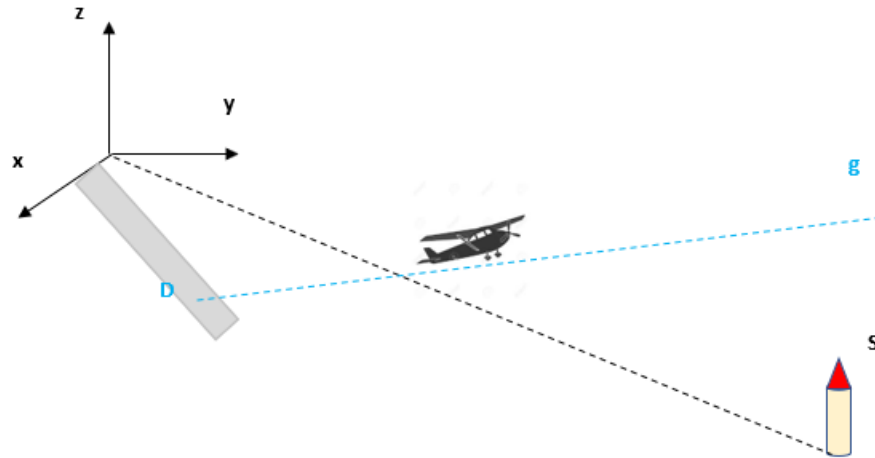
En el sistema cartesiano 3D, marquen el punto  $S(4; 5; 3)$ , dibujen el vector posicional  $\vec{s}$ , estimen su módulo y determinenlo mediante la función “Abs()” de GeoGebra 3D. Comparen el resultado, midiendo la longitud del vector con la herramienta “Distancia o Longitud”.

2. ¿Cómo determinar el largo de segmentos?
  - a. Ubiquen en el sistema cartesiano 3D, los puntos  $A(-6; -2; 3)$  y  $B(6; 1; 7)$ . Dibujen sus vectores posicionales. Estimen la distancia del segmento  $AB$  y anoten esa estimación en sus cuadernos.
  - b. Comprueben su estimación con GeoGebra 3D, mediante la herramienta “Distancia o Longitud” el largo del segmento  $AB$ . Discutan acerca de otras posibles maneras de responder la pregunta.
  - c. Marquen los puntos  $P(1; 2; 4)$ ,  $Q(2; 4; 0)$  y  $R(-4; 6; 2)$ . Además, marquen el punto medio  $M_{QR}$  del lado  $QR$  y dibujen el segmento  $PM_{QR}$ . Dibujen los vectores posicionales de cada punto. ¿Cuánto mide el largo del segmento  $PM_{QR}$ ? Hagan una estimación y anótenla en sus cuadernos.
  - d. Comprueben, usando la herramienta “Distancia o Longitud” de GeoGebra.
  - e. Discutan acerca de otras posibles maneras de responder la pregunta.
  
3. ¿Cómo determinar el ángulo entre dos vectores?
  - a. Ubiquen los puntos  $K(2; 4; 6)$ ,  $L(4; 6; 0)$  y  $M(0; 9; 0)$ , que determinan un triángulo en el espacio. Dibujen sus vectores posicionales.
  - b. ¿Cómo se puede establecer el ángulo interior  $\delta$  en el vértice  $K$ ? Hagan una estimación:  
\_\_\_\_\_
  - c. Comprueben, usando la herramienta “Ángulo” de GeoGebra.
  - d. Discutan acerca de otras posibles maneras de responder la pregunta.
  
4. ¿Cómo saber la distancia entre un punto y un plano?
  - a. Utilicen el sistema coordenado 3D, pueden apoyarse en GeoGebra.
  - b. Imaginen que se tiene un punto  $P$  y un plano  $E$  dado en su forma cartesiana. Usando las herramientas de GeoGebra 3D, elaboren una estrategia para determinar la distancia entre  $P$  y  $E$ . Discutan en el grupo y comuniquen su estrategia.
  - c. Determinen la distancia entre el punto  $P$  y el plano  $E$ , con  $P(2; 0; 1)$  y  $E: x + 8y - 4z = 25$ .

### SITUACIONES AERONÁUTICAS

Se sugiere un trabajo grupal en las siguientes actividades.

1. ¿Cómo establecer la distancia entre un punto  $P$  y una recta  $g$ , en el contexto de distancias de seguridad de una avioneta en la fase del despegue?
  - a. Utilicen el sistema coordenado 3D, pueden apoyarse en GeoGebra.
  - b. En el siguiente dibujo, una avioneta está despegando desde un aeródromo para ir a un pueblo. Se quiere saber la diferencia, en distancia, entre la avioneta y la punta de una torre en el momento en que la nave sobrevuela la torre.



- c. Determinen la distancia entre la avioneta y la punta  $S$  de la torre, con los siguientes datos del vuelo referidos al sistema cartesiano 3D de coordenadas. Las coordenadas de los puntos representan unidades de 100 m. La siguiente información es importante para la situación:
- El lugar del despegue está en el punto  $D(2; 2; 0)$ .
  - El vector director de la recta  $g$  que representa la trayectoria del vuelo, es  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - El lugar de la punta de la torre es  $S(1, 6, 0.5)$ .
2. ¿Cómo saber la distancia de dos rectas que se cruzan en el espacio sin tener intersección? Empleen el sistema coordenado 3D, pueden apoyarse en GeoGebra 3D.
- Consideren las siguientes rectas  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ , y  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$ .
  - Verifiquen que las rectas se cruzan sin intersección.
  - Determinen la distancia entre las rectas. Discutan en el grupo y expliquen su procedimiento.

## SUPERVISIÓN DEL ESPACIO AÉREO

¿Cómo modelar situaciones de supervisión del espacio aéreo? Supongan que hay en el espacio aviones todavía en la fase del despegue, otros en la fase del descenso y otros que están volando horizontalmente dentro de su altura, asignada por la supervisión aérea. Hay distancias de seguridad para vuelos cuyas trayectorias se cruzan en el espacio. La foto muestra un cruce de dos aviones, representados por los rayos de condensación.



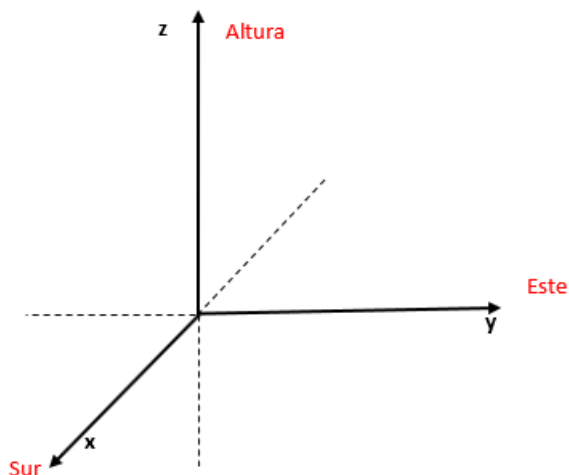
El sistema de coordenadas en tres dimensiones relaciona los tres ejes con los puntos cardinales y la altura sobre el nivel del mar. El Este y el Oeste con el eje Y, el sur y el norte con el eje X y sobre o bajo el nivel del mar con el eje Z. Hay dos aviones  $A_1$  y  $A_2$  en el espacio aéreo, cuyos vuelos en el mismo instante tienen los siguientes datos en kilómetros con relación al punto  $(0; 0; 0)$

Conexión  
interdisciplinaria:  
Ciencias para la  
Ciudadanía  
OA c, 3° y 4° medio

Avión  $A_1$ : Ubicación en el lugar  $P(30; -40; 8)$ , dirección del vuelo horizontal hacia el NE.

Avión  $A_2$ : Ubicación en el lugar  $Q(20; 50; 8.5)$ , dirección del vuelo horizontal hacia el NO.

1. Ubica los aviones en el sistema de coordenadas 3D.



- Suponiendo que ambos aviones tengan la misma velocidad, la situación se puede modelar en forma netamente geométrica. Conjeturen acerca de una eventual colisión entre ambas naves si mantienen sus trayectorias. Discutan en el grupo y expliquen su hipótesis.
- Elaboren la ecuación vectorial que representa la trayectoria de cada vuelo.

- c. Determinen el lugar de colisión o de cruce y, en el caso de un cruce, la distancia vertical entre los aviones. Discutan y expliquen su procedimiento.
- d. Verifiquen y representen los resultados con algún programa de geometría digital.
2. En otra situación en el espacio aéreo, un avión  $A$  está en el lugar  $R(3; 2; 1)$  volando en línea recta con el vector  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , que está ascendiendo. Otro avión  $B$  está en la fase del descenso y se ubica en el lugar  $Q(-6; -5; 7)$ , volando también en línea recta con el vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .
- a. Determinen la distancia  $d$  entre los aviones en el momento en que se cruzan. Discutan y expliquen su procedimiento.
- a. Verifiquen y representen los resultados, usando GeoGebra 3D.
- b. ¿Es posible que establecer si puede haber o no una colisión de aviones, por medio de una fotografía en dos dimensiones? Discutan y expliquen su argumento.

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere que los estudiantes utilicen la herramienta GeoGebra 3D para desarrollar y verificar sus resultados. Aunque varios de los problemas planteados podrían resolverse mediante el producto punto entre vectores, el foco no está puesto en ello; por ende, se prefiere que busquen caminos alternativos con apoyo tecnológico.
- Conviene que usen las herramientas de GeoGebra 3D para determinar distancias, módulos y ángulos entre vectores; aun así, cabe recordar cómo se aplica el teorema de Pitágoras. En las actividades, el ángulo entre vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se limita a vectores directores de rectas que tienen un punto común.
- Cuando necesiten saber la distancia entre un punto y un plano, se sugiere que discutan y elaboren una estrategia, a partir de las herramientas que tiene el programa de geometría dinámica.
- Hay que enfatizar en cuáles son las posibilidades de posiciones relativas entre dos rectas, en el espacio coordinado 3D: cortarse, ser paralelas o cruzarse a una cierta distancia entre ellas.
- En la actividad contextualizada, se recomienda centrar la atención en cómo la desarrollan, más que en si obtienen un resultado específico. Aquí valen las conjeturas, las propuestas y la diversidad en la búsqueda de soluciones.
- Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - En el sistema de coordenadas 3D, representan gráficamente ecuaciones vectoriales de rectas y planos.
  - Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos en el espacio.
  - Justifican las estrategias y soluciones de problemas, utilizando las representaciones pictóricas o simbólicas de rectas y planos en el espacio.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

### *Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Formulario de vectores  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://calculo.cc/temas/temas\\_geometria\\_analitica/vectores\\_escalar/teoria/form\\_vec.html](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://calculo.cc/temas/temas_geometria_analitica/vectores_escalar/teoria/form_vec.html)
- Producto escalar de dos vectores  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.calculadoraconvertidor.com/producto-escalar-de-dos-vectores/>



## Actividad de Evaluación

### Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Indicadores de evaluación

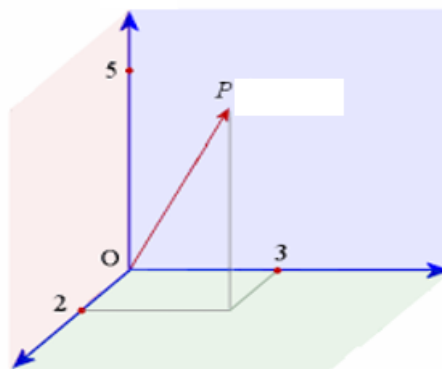
- Representan puntos del espacio en el sistema de coordenadas 3D.
- Generalizan la noción de vector y de operatoria vectorial desde el plano 2D hacia el espacio 3D.
- Resuelven problemas que involucran la reflexión de puntos respecto de planos.
- Representan gráficamente en el sistema de coordenadas 3D, ecuaciones vectoriales de rectas y planos.
- Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos en el espacio.
- Resuelven problemas sobre intersecciones entre una recta y un plano cualquiera, y entre un plano cualquiera con los planos  $XY$ ,  $XZ$  e  $YZ$ .
- Justifican las estrategias y soluciones de problemas, utilizando las representaciones pictóricas o simbólicas de rectas y planos en el espacio.

**Duración:** 6 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 2, cada una por sí misma o en conjunto. Conviene que los alumnos trabajen colaborativamente en algunas, a fin de que discutan y propongan estrategias para llegar a la o las soluciones posibles.

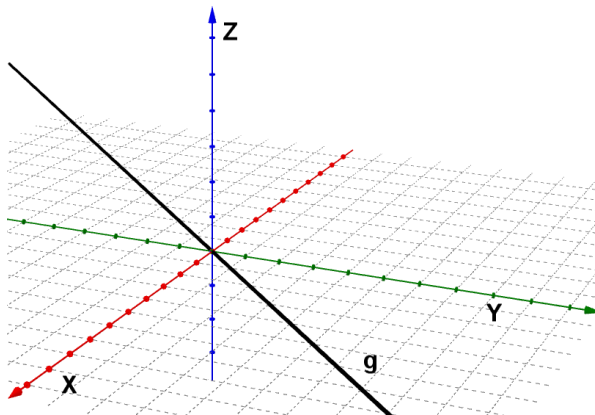
Los jóvenes tienen que ubicar ejes y coordenadas de vectores posicionales asignados a puntos, en el sistema cartesiano 3D de coordenadas.

1. Determina las coordenadas del punto  $P$  y su vector posicional.



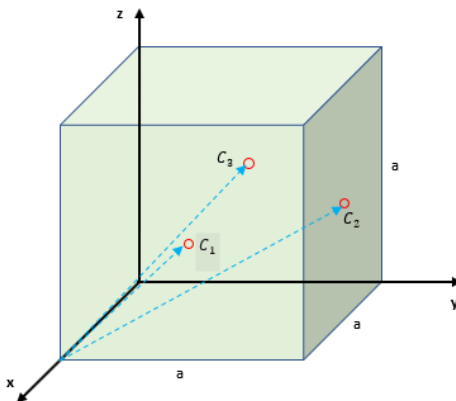
- a. Marca ahora los puntos  $R(-2; 6; 8)$  y  $S(5; 3; 1)$ .

- b. Determina el vector  $\overrightarrow{RS}$ , que traslada el punto R al punto S, y además el vector  $\overrightarrow{SR}$ .
- c. ¿Qué tienen en común los vectores  $\overrightarrow{RS}$  y  $\overrightarrow{SR}$  y en qué difieren?
- d. ¿En qué plano se ubica el punto que tiene el vector posicional  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ?
2. Posición de rectas y planos especiales.
- a. Determina un vector director de una recta  $f$  que tiene la dirección del eje X.
- b. Determina un vector director de una recta  $g$  que tiene la dirección de una bisectriz entre los ejes horizontales.



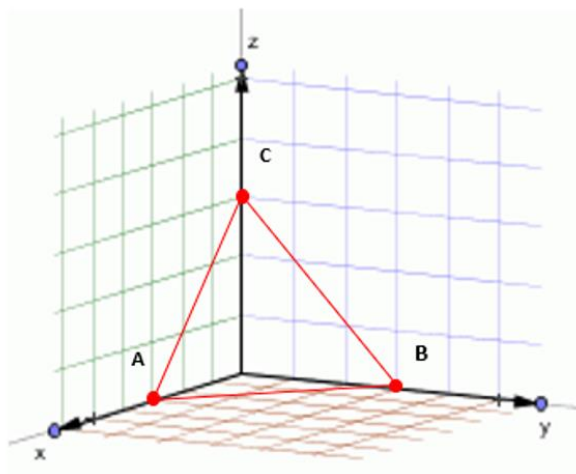
- c. Si  $a, b \in \mathbb{R}$ , ¿cuál sería la ubicación del plano  $E$  con el punto  $P(0; 0; a)$  y los vectores  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ? Haz un esquema.
- d. Verifica lo anterior, determinando la ecuación del plano  $E$  con  $P(0; 0; 5)$  y los vectores  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

3. En el sistema cartesiano 3D de coordenadas, se muestra un cubo del lado  $a$ .



- a.  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son puntos medios de la cara delantera, la cara lateral derecha y la cara trasera del cubo. Representa los vectores posicionales  $\vec{c}_1$ ,  $\vec{c}_2$  y  $\vec{c}_3$  de los puntos  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ .
- b. Determina las coordenadas del vector  $\overrightarrow{C_2C_3}$ .

- c. Estima el ángulo entre los vectores  $\vec{c}_2$  y  $\vec{c}_3$ . Verifica el resultado con alguna herramienta digital o de forma manual.
4. Considerando  $a \in \mathbb{R}$ , se marcó los puntos  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; a; 0)$  y  $C(0; 0; a)$  en un sistema cartesiano 3D de coordenadas, como muestra la figura.

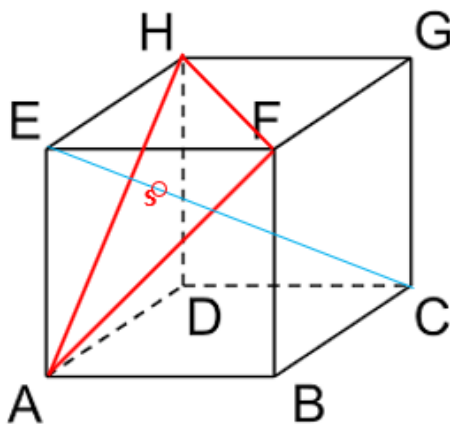


- a. Determina la ecuación vectorial de la recta  $g$  que pasa por el origen  $O$  del sistema cartesiano 3D y el centro  $Z$  del triángulo  $ABC$ .
- b. Los puntos  $A_k(ka; 0; 0)$ ,  $B_k(0; ka; 0)$  y  $C_k(0; 0; ka)$ , con  $k \in \mathbb{R}$ , representan el triángulo  $A_kB_kC_k$ . Argumenta y comunica si la recta de la actividad anterior pasa o no por el centro  $Z_k$  del triángulo  $A_kB_kC_k$ .
5. Reflexión de un punto del espacio en un plano (simetría especular).
- a. Refleja el punto  $P(5; 2; 3)$  en el plano  $xy$ . Verifica el resultado con GeoGebra 3D.
- b. Refleja el punto  $R(2; 6; 4)$  en el plano  $xz$ . Verifica el resultado con GeoGebra 3D.
- c. Refleja el punto  $R(2; 6; 4)$  en un plano paralelo al plano  $xz$  que contiene el punto  $S(0; 1; 0)$ . Verifica el resultado con GeoGebra 3D.
- d. Refleja el punto  $Q(3; 3; 0)$  en el plano  $E$  con la ecuación cartesiana de  $E: 3x + 2y + z = 8$ .

Se recomienda el trabajo grupal en los próximos ejercicios.

1. Determinen tres planos diferentes que contengan una recta  $g_0$  en común y los puntos  $P_0(2, 3, 4)$  y  $Q_0(-2, 1, 4)$ . Discutan en el grupo y comuniquen su estrategia.
2. En un sistema cartesiano 3D de coordenadas, un cubo tiene los vértices  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(0, a, 0)$ ,  $C(-a, a, 0)$  y  $E(0, 0, a)$ . Los puntos  $A$ ,  $F$  y  $H$  determinan un plano  $M$  y los puntos  $E$  y  $C$  determinan una recta  $g$ .
- a. Determinen una ecuación vectorial del plano  $M$  y de la recta  $g$ .

- b. La recta  $g$  intersecta el plano  $M$  en el punto  $S$ . Determinen las coordenadas del punto  $S$ .
- c. Verifiquen el resultado de  $S$  mediante herramientas digitales como GeoGebra para  $a = 8$ .



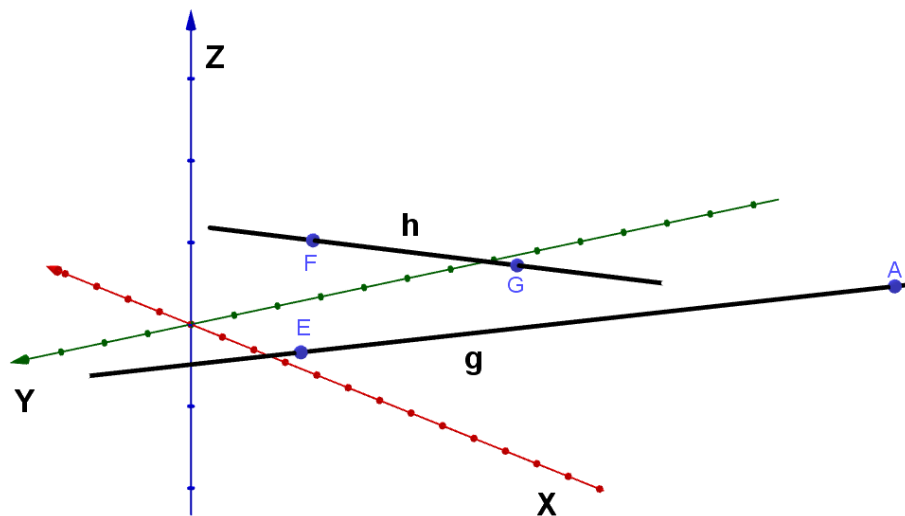
### 3. Intersección de rectas con planos.

- a. Determinen la intersección entre la recta  $g$  y el plano  $E$  que tienen las siguientes ecuaciones vectoriales:  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$ , y  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$ .  
Discutan en el grupo y comuniquen su estrategia.
- b. Encuentren la intersección del plano  $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  con  $k, l \in \mathbb{R}$ , con los tres ejes de coordenadas. Denominen los puntos con  $S_x, S_y$  y  $S_z$ . Discutan en el grupo y comuniquen su estrategia.

### 4. Distancia entre rectas en el sistema coordenado 3D.

- a. Consideren las rectas de ecuaciones  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ , y  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ . Dichas rectas no se intersectan, pero sí se cruzan en el sistema coordenado 3D.

- b. Grafica cada una en GeoGebra 3D.



- c. Propongan una estrategia para establecer a qué distancia vertical están separadas.

5. Distancia  $d$  entre un punto  $Q$ , perteneciente a una recta  $g$ , y un plano  $H$ .

- a. Expliquen los pasos para determinar la distancia  $d$ .

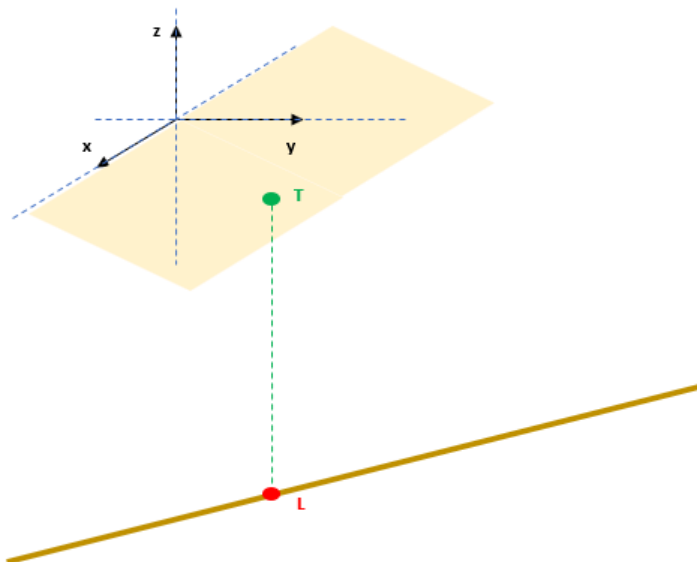
- b. Verifiquen que el punto  $Q(3, 1, 1)$  pertenece a la recta  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ .

- c. Determinen la distancia entre el punto  $Q$  y el plano  $E: 2x + 10y + 11z = 252$ .

### EL RESCATE DE LOS 33

En situaciones de rescate en minería, como ocurrió en Chile en el año 2010 con los “33”, se necesita maquinaria de perforación del suelo de alta precisión. El sistema “Rotary Vertical Drilling System” (RVDS), que significa “sistema de taladro vertical”, cumple con esta exigencia. En esta actividad, se modela con geometría 3D una situación similar al rescate de “los 33”, con los siguientes supuestos de simplificación y unos pasos propuestos del procedimiento.





1. En referencia al sistema cartesiano 3D, el lugar  $L$  está a 700 m de profundidad. La posición horizontal está a 200 m al oeste y a 300 m al sur. La dirección geográfica de norte a sur está representada por el eje  $y$ . La perforación del pozo de rescate se debe realizar exactamente en dirección vertical.
  - a. Determinen las coordenadas de la torre del taladro en el punto  $T$ .
  - b. Determinen la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos  $T$  y  $L$ .
2. Se supone una tolerancia de 0,5% de la exactitud en la desviación del taladro de la dirección vertical.
  - a. Determinen el vector director  $\vec{v}$  de la recta (y del taladro) que pasa por el punto  $T$ , suponiendo una desviación en dirección del eje  $x$ .
  - b. Determinen el lugar  $L'$  en el cual el taladro llega a la profundidad de 700 m.
3. El sistema "RVDS" utilizado en el rescate de "los 33" tiene más exactitud, con una tolerancia de 0,05% de desviación.
  - a. Determinen el vector director  $\vec{u}$  de la recta (y del taladro) que pasa por el punto  $T$ , suponiendo una desviación en dirección del eje  $y$ .
  - b. Determinen el lugar  $L''$  en el cual el taladro llega a la profundidad de 700 m.
4. Suponiendo una desviación de 0,05% en cualquier dirección horizontal, ¿cuál podría ser el lugar físico de los posibles puntos en los cuales el taladro perfora el plano en 700 m de profundidad?
  - a. Argumenten y comuniquen las respuestas.
  - b. Determinen cuatro puntos que pertenecen a este lugar.

## PAUTA DE EVALUACIÓN

Criterios de evaluación	Niveles de logros		
	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Representan puntos del espacio en el sistema de coordenadas 3D.			
Generalizan la noción de vector y de operatoria vectorial desde el plano 2D hacia el espacio 3D.			
Resuelven problemas que involucran la reflexión de puntos respecto de planos.			
Representan gráficamente ecuaciones vectoriales de rectas y planos en el sistema de coordenadas 3D.			
Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos en el espacio.			
Resuelven problemas sobre intersecciones entre una recta y un plano cualquiera, y de un plano cualquiera con los planos $XY$ , $XZ$ e $YZ$ .			
Justifican las estrategias y soluciones de problemas, utilizando las representaciones pictóricas o simbólicas de rectas y planos en el espacio.			

# Unidad 3



## Unidad 3: Generación de cuerpos utilizando patrones geométricos

### Propósito de la unidad

Se espera que los estudiantes resuelvan problemas de optimización al relacionar capacidad con área, usando herramientas tecnológicas. Podrán generar figuras a partir de sus conocimientos previos, como la rotación y la traslación, pero en este nivel se requiere una mayor capacidad espacial, pues estas transformaciones se hacen y dibujan en el sistema de coordenadas 3D. Algunas preguntas que pueden orientar el desarrollo de esta unidad son: ¿Cómo se puede representar situaciones por medio de cuerpos generados por patrones de rotación y traslación? ¿Cómo se genera una forma y qué características tienen en común las piezas creadas con la ayuda de un torno?

### Objetivos de Aprendizaje

#### OA 4.

Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

## Actividad 1: Trasladar y rotar figuras 2D para generar figuras 3D

### PROPÓSITO

Los estudiantes reconocen y representan los cuerpos que surgen al trasladar o rotar figuras planas en el espacio, utilizando la imaginación y herramientas tecnológicas, y haciendo dibujos o esquemas manuales. Deben ser perseverantes y proactivos al buscar cómo hacer sus dibujos y presentar sus imágenes mentales de los cuerpos. Además, se espera que identifiquen los elementos geométricos necesarios para calcular áreas y volúmenes de los cuerpos generados.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 4.** Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

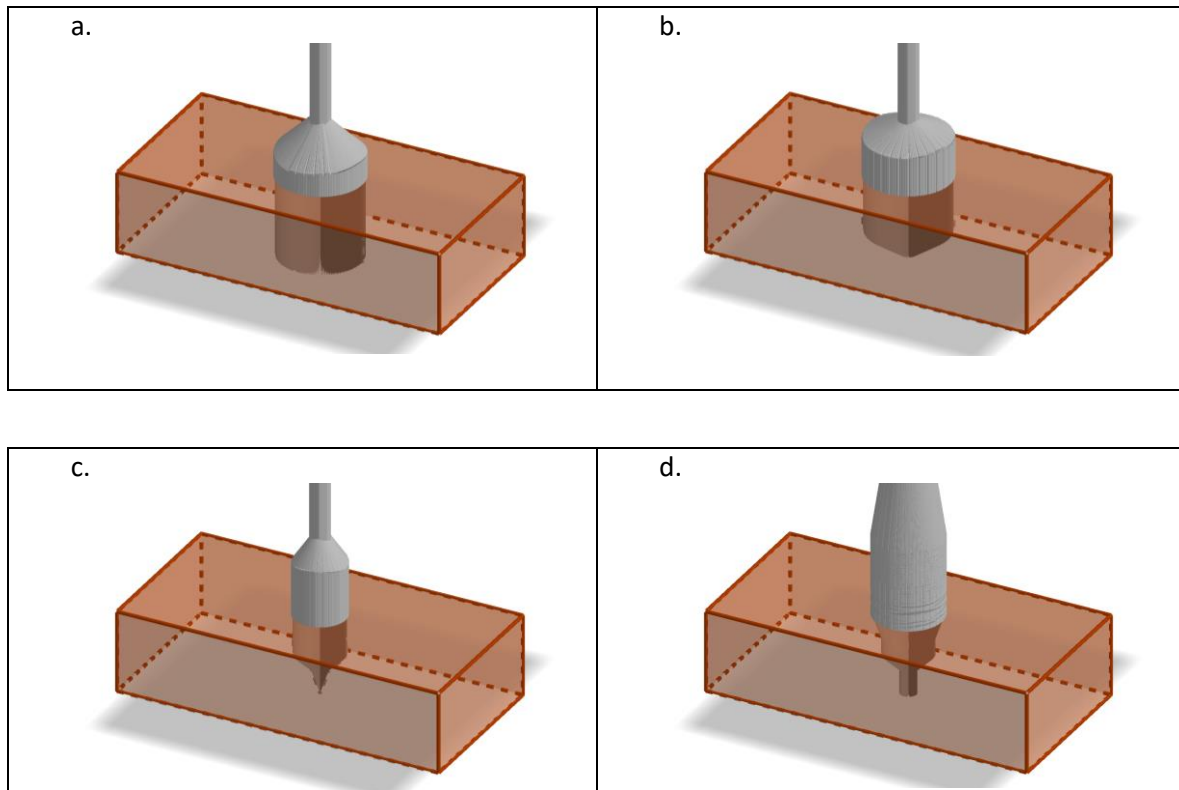
- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

**DESARROLLO****¿CUÁL ES LA TRANSFORMACIÓN?**

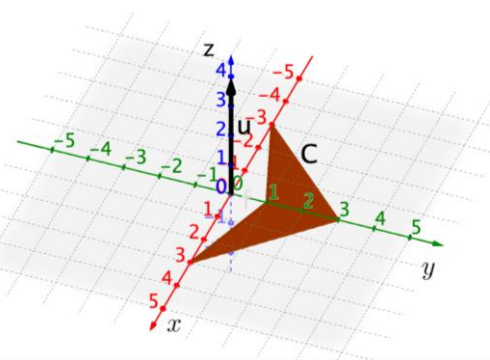
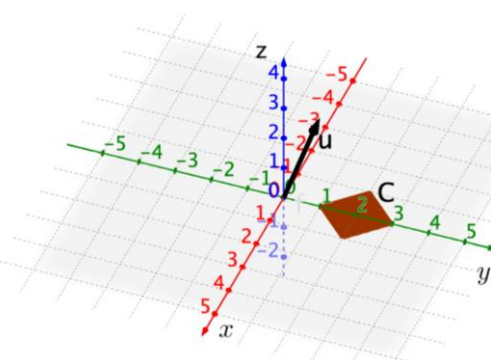
1. Se quiere hacer distintos agujeros en una madera. Para ello, se cuenta con un taladro, brocas planas para madera y la posibilidad de realizar deformación plástica por medio de la forja para la broca (cambiar la forma de las brocas según lo que se necesite).

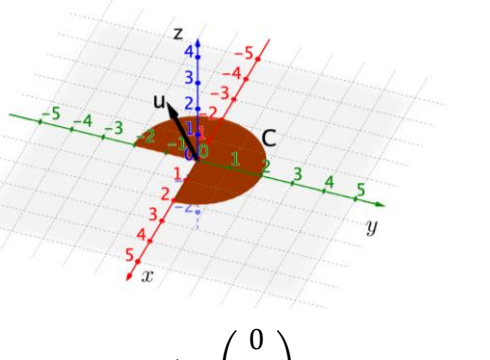
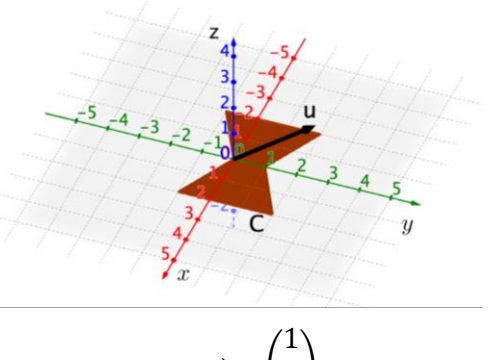
Dibuja la broca plana que se empleó para las siguientes situaciones.



- a. ¿Qué tipo de transformación usa la broca para realizar el agujero?  
 b. Si la broca traspasara la madera, ¿qué figura resultaría?

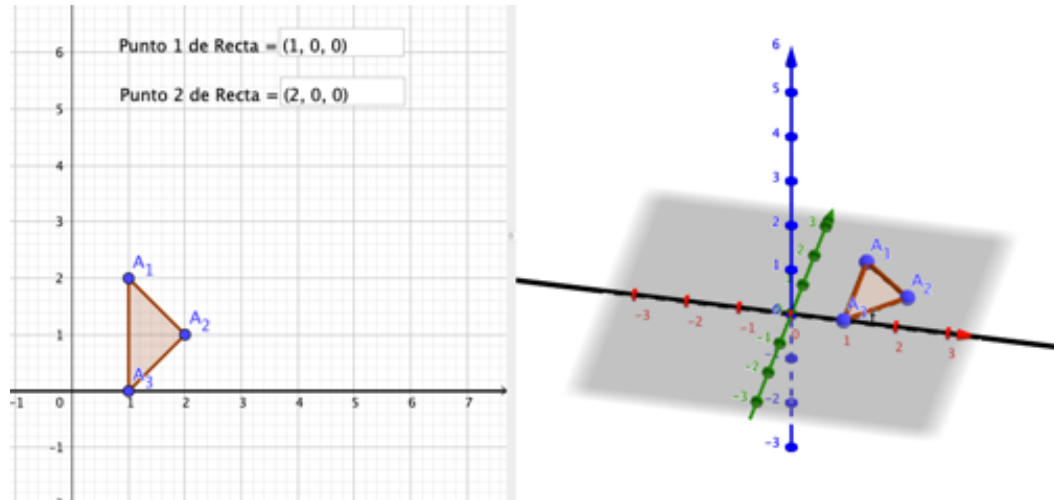
2. Se tiene la base, en dos dimensiones, de una figura que se generará por medio de una impresora 3D, que repetirá capa a capa la figura en 2D en una dirección específica. Dibuja el resultado del cuerpo, teniendo en cuenta el vector  $u$  y la figura plana  $C$ , y luego responde las preguntas.

<p>a.</p> 	<p>b.</p> 
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

<p>c.</p> 	<p>d.</p> 
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

- a. ¿Qué tipo de transformación utiliza esta impresora 3D? ¿Qué elemento geométrico es importante al imprimir en este contexto?
- b. Si se quisiera imprimir la figura b. sobre a., ¿mantendría el equilibrio si se saca de la base de impresión?

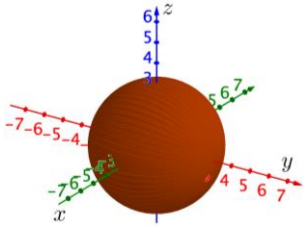
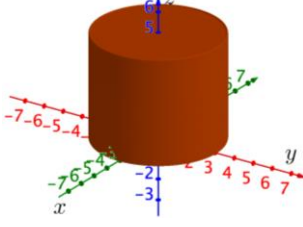
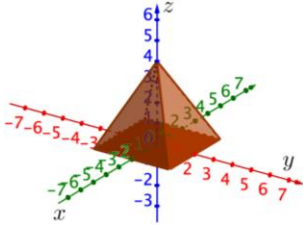
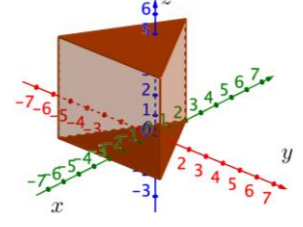
3. Se tiene un polígono formado por una cantidad definida de vértices (de 3 a 8) para generar un cuerpo por medio de rotación en torno a una recta  $L$ . Para hacerlo, aplica el recurso "RotacionPoligonoE3.ggb" que se muestra en la imagen.



- ¿Qué diferencia hace la cantidad de vértices de la figura 2D con respecto al cuerpo?
- ¿Se puede generar un cuerpo con capacidad (cuerpos que están huecos y pueden albergar en su interior otros cuerpos en una cantidad) por medio de rotación? ¿Cómo?
- Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:
  - Si un mismo polígono se rota en diferentes rectas, se obtiene el mismo cuerpo.
  - Si un mismo polígono se rota en diferentes rectas, las áreas de los cuerpos generados es la misma.
  - Si un mismo polígono se rota en diferentes rectas, los volúmenes de los cuerpos son el mismo.

Para las que son falsas, deber mostrar un ejemplo donde no se cumple la proposición; en tanto, tienes que explicar las verdaderas a partir de tus conocimientos de geometría.
- Si se rota un polígono en  $360^\circ$ , ¿qué condiciones debe cumplir otro polígono para generar el mismo cuerpo al rotarlo en  $180^\circ$ ?

4. Dados los siguientes cuerpos geométricos, identifica con una cruz cuáles se pueden generar por rotación, traslación, por ambos o por ninguno. Dibuja cuál es la figura plana que se emplea para formar el cuerpo en 3D, según corresponda, y luego responde las preguntas.

Cuerpo geométrico	Rotación	Traslación	2D Rotación	2D Traslación
				
				
				
				

- ¿Cuándo se puede asociar la transformación con rotación?
- ¿Cuándo se puede asociar la transformación con traslación?

## UNA CARPA DE CIRCO

1. Distribuyan las diferentes tareas según las habilidades de cada integrante. Se quiere modelar una maqueta de una carpa de circo, tanto de forma manual a escala como de forma digital.

Modo 1: Material concreto

- a. Base de plumavit
- b. Palos de maqueta o palos de brochetas
- c. Tela
- d. Pegamento

Modo 2: Applet ya construido

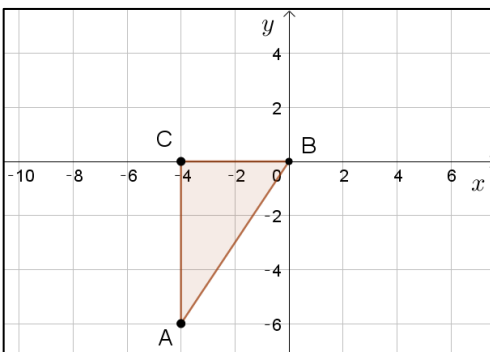
Modo 3: Applet para construir

Modo 4: Crear applet con un programa de geometría dinámica

2. Antes de comenzar discute con tu grupo sobre las siguientes preguntas:
  - a. ¿Qué cuerpos geométricos se debió tener en cuenta para construir la carpa?
  - b. ¿Qué figuras planas están relacionadas con los cuerpos geométricos utilizados?
  - c. A partir de las figuras planas, ¿qué transformaciones (rotación o traslación) se puede usar para generar el cuerpo geométrico?
  - d. ¿Se puede construir la carpa con un solo tipo de transformación y una sola figura plana?
  - e. ¿Se puede construir la carpa con dos tipos de transformaciones y dos figuras planas?
  - f. Si se necesita construir la maqueta con un diámetro de 30 cm y una altura de 20 cm, ¿se puede calcular la tela que se necesita en  $cm^2$ ? ¿Qué condiciones deben considerar para calcularla? Si la proporción es 1:2 entre las alturas de los dos cuerpos geométricos que forman la carpa, ¿cuánta tela habrá que usar?
  - g. Considerando las condiciones planteadas en f., calculen el volumen de la carpa.
3. Manos a la obra: construye tu maqueta e identifica los elementos clave que te permiten girar y hacer toda la carpa de circo. Previamente, calcula los gastos de material y verifica en la práctica todo lo planificado.

## EL EJE PARA PASAR AL 3D

Observar el triángulo de la figura:



- Determina las coordenadas de los vértices del triángulo ABC y anota en el dibujo.
- Rota el triángulo en  $\overleftrightarrow{AB}$  y describe la figura tridimensional que se genera.
- Calcula el volumen del cuerpo geométrico generado.
- Calcula el área de la superficie del cuerpo.
- Se desea encerrar ese cuerpo en un cilindro de altura  $AB$  y radio entre el punto C y el segmento perpendicular a la recta  $AB$ . Calcula el volumen de dicho cilindro.
- Explica y argumenta: ¿cuál es el volumen del espacio que queda entre el cilindro y la figura inicial?

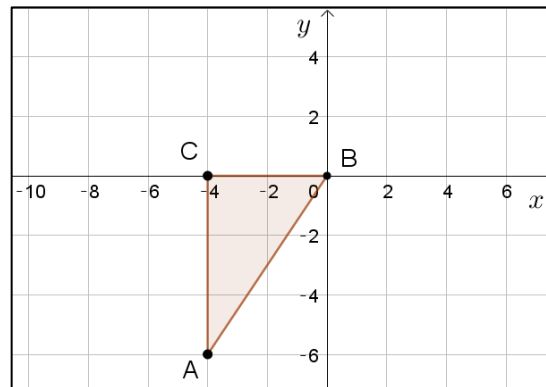
## EL COSTO DEL ÁREA

- Aplicar los conceptos de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos para constatar que dos cuerpos pueden tener el mismo volumen, pero distinta área total, lo que implica un mayor costo de material para producir uno de ellos.
  - Calcula el área total de un cubo, cuyo volumen es  $64 \text{ cm}^3$ .
  - Calcula el área total de un paralelepípedo de medidas  $8 \text{ cm}$  de largo,  $2 \text{ cm}$  de ancho y  $4 \text{ cm}$  de alto.
  - Plantea una conjetura respecto del volumen de ambos cuerpos.
  - Formula una conjetura respecto del área total de ambos cuerpos.
  - Si se quiere revestir cada cuerpo con un material que cuesta  $\$7\,500$  los  $100 \text{ cm}^2$ , ¿dónde se gastará más dinero?



2. Aplicar los conceptos de área y volúmenes de cuerpos geométricos generados a partir de la rotación de una misma figura, pero con distintos ejes de rotación.

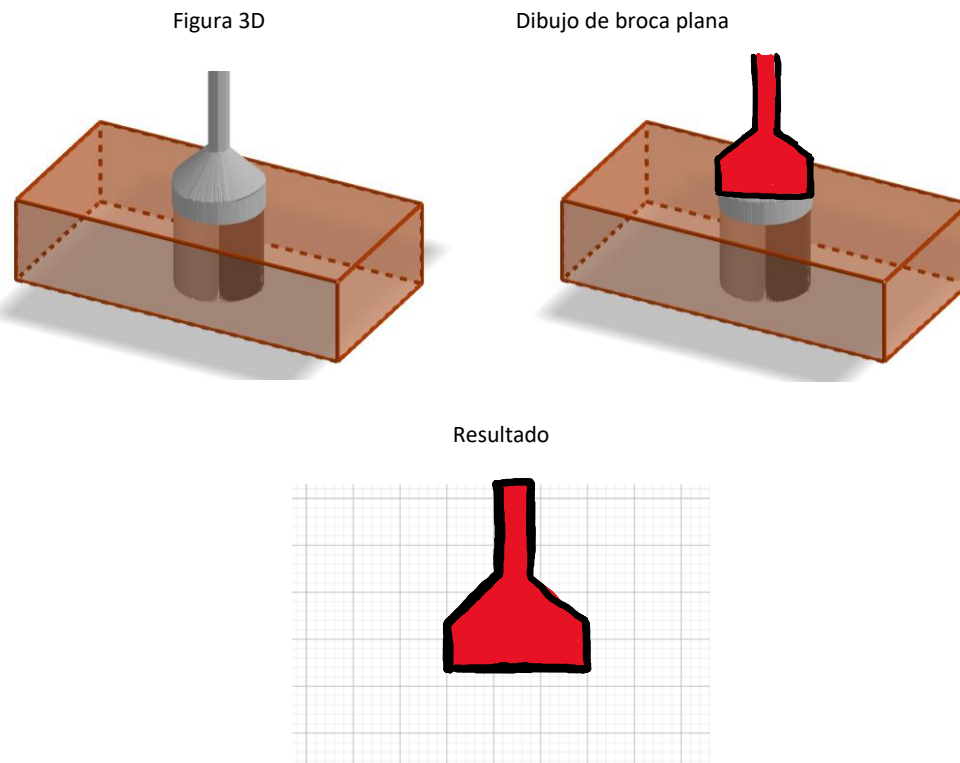
Observa el triángulo de la figura:



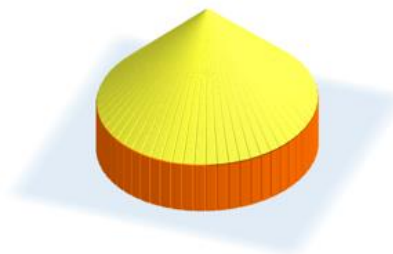
- Determina las coordenadas de los vértices del triángulo ABC y anótalos en el dibujo.
- Haz una conjetura sobre la forma que se obtendrá al rotar la figura respecto del eje  $x$ .
- Plantea una conjetura sobre la forma que se obtendrá al rotar la figura respecto de  $\overleftrightarrow{AC}$ .
- Calcula el área de la superficie y el volumen del cuerpo geométrico generado al rotar el triángulo en torno al eje  $x$ .
- Calcula el área de la superficie y el volumen del cuerpo geométrico generado al rotar el triángulo en torno a la  $\overleftrightarrow{AC}$ .
- Determina la razón entre el volumen del primer cono de rotación y el segundo.
- Argumenta sobre la veracidad o falsedad de la siguiente conjetura: "Los volúmenes de los conos obtenidos son iguales".

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se debe tener en cuenta que, en la primera actividad, se describe el movimiento de la broca funcionando con el taladro, por lo cual cada imagen muestra lo que resulta al llegar a la base de la madera. Las formas son el contorno de la figura original; por ejemplo, en el caso a):



2. Considera modificaciones en el applet `RotacionPoligonoE3.ggb`, tales como variar el ángulo de rotación de la figura mediante un deslizador, cambiar los dos puntos que generan la recta  $L$ , modificar la posición de los vértices y finalmente variar la cantidad de vértices.
3. En la cuarta actividad, se sugiere que se mencione el ángulo de rotación en la esfera: si la rotación es de una semicircunferencia, éste debe ser en  $360^\circ$ ; en cambio, si es una circunferencia, el ángulo debe ser de  $180^\circ$ .
4. En la actividad de la carpa de circo, el modo 1 invita a los jóvenes a hacer una carpa por medio de una maqueta en la cual se pueda observar de forma concreta las figuras involucradas, como muestra la imagen:



5. Se puede considerar 4 figuras planas para construir la carpa: circunferencia, rectángulo, triángulo y trapecio rectángulo; es decir, lo pueden hacer mediante la rotación de un rectángulo y un triángulo rectángulo, la rotación de un trapecio rectángulo o la traslación de una circunferencia y luego, la rotación de un triángulo rectángulo. Se debe explicar a los estudiantes que no analicen solo una transformación, ya que hay 3 posibilidades.
6. Se sugiere invitarlos a conjeturar sobre qué ocurre con la variación de la altura de los cuerpos y cómo influyen estas medidas en el cálculo del área y el volumen de la carpa final.
7. Asociar conceptos como la rotación de una broca plana o la impresión 3D, se vincula directamente con los conceptos de rotación y traslación de figuras planas; la primera, generando un agujero en una madera y la segunda, construyendo una estructura a partir de filamentos.
8. Luego de dibujar la figura que surge al rotar el triángulo en la recta  $AB$ , el estudiante notará que debe encontrar la ecuación de la recta perpendicular a  $AB$  que pasa por el punto  $C$ . Así integrará conocimientos de años anteriores para calcular el radio y la altura de los dos conos, usando la distancia entre dos puntos y el punto de intersección de dos rectas (sistema de ecuaciones lineales).
9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Representan figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas, en forma manual y con herramientas digitales.
  - Resuelven problemas que involucran calcular el área de figuras 3D generadas por traslación y rotación de figuras 2D.
  - Explican de forma visual los procedimientos para crear figuras 3D a partir de figuras 2D.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

### *Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Video: Descripción de la impresora 3D  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=C4HAJ5HLuB4>
- Video: Cuerpos generados por rotación y traslación  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=SJHEFsqvTHU>
- Recursos digitales propuestos para la actividad  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/www.curriculumnacional.cl/OA3>.

## Actividad 2: Rotar y trasladar formas en el espacio

### PROPÓSITO

Los estudiantes representan cuerpos geométricos en el espacio tridimensional, utilizando la rotación y traslación de figuras. Se espera que aprovechen las herramientas disponibles para aprender sobre la generación de cuerpos y para dar respuestas a problemas. Además, se busca que observen los elementos geométricos que se relacionan con el área y el perímetro de figuras planas para calcular áreas y volúmenes de los cuerpos creados; pueden aplicar ese conocimiento para modelar situaciones de la vida cotidiana.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 4.** Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### ROTACIÓN Y TRASLACIÓN

1. Utiliza algún programa de geometría dinámica para trasladar figuras planas en el espacio. Crea tu propia figura y traslada según un vector.
  - a. ¿Qué debes tener en cuenta antes de trasladar figuras planas?
  - b. ¿Qué se puede modificar en la traslación de una misma figura plana?
  - c. ¿Cuál es la diferencia entre trasladar sólo rectas y trasladar polígonos?
2. Usa alguna herramienta digital para generar simulaciones en 3D. Crea tu propia figura y rota según un ángulo.
  - a. ¿Qué debo tener en cuenta antes de realizar la “rotación axial” de figuras planas?
  - b. ¿Qué se puede modificar al rotar una misma figura plana?
  - c. ¿Cuál es la diferencia entre rotar sólo rectas y rotar polígonos?

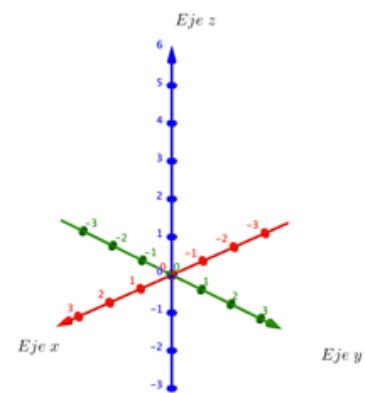
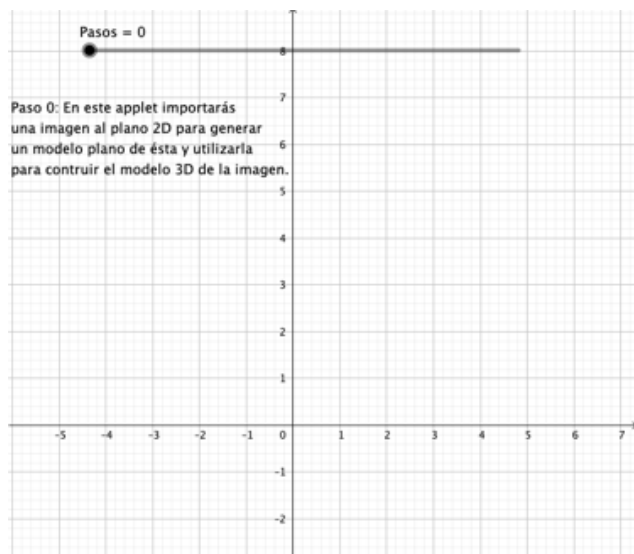
## LA REALIDAD POR MEDIO DE IMÁGENES

Esta actividad se divide en cuatro etapas y se sugiere que las trabajen en grupos. Las tres primeras son de modelamiento y en la cuarta deben responder preguntas.

1. Discutan y seleccionen una imagen de las seis disponibles a continuación, para hacer un modelamiento en 3D.



2. Usen el recurso “ImportarImagen.ggb” de GeoGebra que muestra la siguiente imagen, para generar simulaciones en 3D.



3. Respondan las siguientes preguntas:
  - a. De los 6 modelos a elegir, ¿cuál les pareció más complejo de hacer? ¿Por qué?
  - b. ¿Qué fue lo más difícil de simular en el modelo seleccionado?

- c. ¿Cuál es la mejor estrategia para calcular el área de la figura plana del modelo que eligieron, construido en 2D? ¿Cuál es el área de la figura 2D resultante?
- d. ¿Cuál es la mejor estrategia para calcular el perímetro de la figura plana de dicho modelo? ¿Cuál es el perímetro de la figura 2D resultante?
- e. ¿Cómo podrían aproximarse al cálculo del área de la figura 3D, a partir de los resultados anteriores?
- f. ¿Y cómo podrían aproximarse al cálculo del volumen de la figura 3D?
- g. Según el resultado, ¿creen que le falta algo al modelo generado en 3D? ¿Cómo podrían mejorar dicha figura para crear un modelamiento más preciso?
- h. Si se estuviera pensando imprimir dicho modelo en la realidad (sin considerar mecanismos ni tipo de material como vidrio, madera, plástico u otro, sino solo la estructura o carcasa), ¿qué se debería agregar a la figura? ¿Sería factible si tuvieran el tiempo suficiente para hacerlo?

### FIGURAS COMUNES EN 3D

Considerando lo que hiciste antes en grupo, crea ahora individualmente un modelo en 3D: construye un cono, cilindro o esfera. Esta actividad tiene las mismas características de la actividad grupal, pero esta vez eres tú quien crea y responde.

1. Selecciona la figura plana que rotarás o trasladarás para generar alguno de los cuerpos geométricos indicados.
2. Haz la estructura en 2D en GeoGebra; podrás emplear las herramientas rectas, circunferencias o polígonos.
3. Ahora debes crear un modelo 3D de la estructura diseñada, considerando lo hecho en la actividad grupal.
4. Responde las siguientes preguntas:
  - a. ¿Utilizaste alguna herramienta diferente de las indicadas en GeoGebra para lograr tu modelo 2D? Explica el procedimiento, indicando las herramientas y el proceso que seguiste.
  - b. De lo hecho en la estructura 2D, ¿qué cobra mayor importancia en la estructura? ¿Qué diferencia práctica habría entre usar segmentos unidos y polígonos?
  - c. Para hacer el modelo 3D, ¿aplicaste solo rotación o solo traslación?
    - Si tu respuesta es “sí, solo una transformación”, ¿crees que se puede usar la otra para generar el mismo cuerpo? ¿A qué se debería que no puedas?
    - Si tu respuesta es “no, utilicé ambas”, ¿a qué se debe que puedas hacerlo así?
  - d. ¿Es posible calcular el área de la figura en 2D y el volumen de la figura 3D con los datos que voy obteniendo? ¿Qué necesitaría para hacerlo? ¿Se puede obtener dichos datos con GeoGebra?

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. En las dos primeras actividades, se sugiere que primero formen figuras regulares, como cuadrados, rectángulos o triángulos, con la herramienta polígono y activando el rastro del polígono; luego hacen lo mismo en paralelo, pero construyendo dichas figuras solo con rectas y puntos y activando el rastro de cada segmento de forma separada. El objetivo es que vean la diferencia entre trasladar y rotar sólo rectas y cuerpos completos.
2. Se sugiere incentivarlos a que, luego de la construcción, manipulen vectores y ángulos para responder las preguntas.
3. Las actividades de modelamiento apuntan a que, mientras parte de un grupo desarrolla el modelo, la otra parte discuta a qué obedece que no seleccionaron las otras figuras geométricas; asimismo, cómo asociar los conceptos de área y perímetro de 2D con el área y el volumen en cuerpos en 3D, y qué otras herramientas podrían emplear para mejorar el modelo en 3D. Luego de efectuar la construcción y responder algunas preguntas, todo el grupo intercambia la experiencia y responde las preguntas faltantes del trabajo grupal.
4. Es importante orientarlos para que dediquen parte de sus esfuerzos a analizar qué relación hay entre el área y el perímetro de figuras planas, y el área y el volumen de cuerpos geométricos. Deberá reforzar las ideas para que encuentren dichas relaciones y así puedan calcular en cada caso que construyan. Para esto, puede ejemplificar con el perímetro de la circunferencia y el área del círculo ( $P_{\text{circunferencia}} = 2 \cdot r \cdot \pi$  y el  $A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$ ), y el área y el volumen de un cilindro (en el área:  $A_{\text{cilindro}} = A_{\text{Basal}} + A_{\text{lateral}} = 2 \cdot A_{\text{círculo}} + h \cdot P_{\text{circunferencia}}$ , y en el volumen:  $V_{\text{cilindro}} = h \cdot A_{\text{círculo}}$ )
5. Si hay diferencia entre los equipos respecto de cómo seleccionaron las imágenes y construyeron el recurso de GeoGebra, que expongan grupalmente su experiencia con la construcción y compartan las respuestas a las preguntas para enriquecerse mutuamente.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Resuelven problemas que involucran calcular el área o volumen de figuras 3D generadas por traslación y rotación de figuras 2D.
  - Representan figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas, en forma manual y con herramientas digitales.
  - Identifican los elementos centrales de una figura 3D, que provienen de rotar o trasladar una figura 2D.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Cuerpos generados por rotación y traslación  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=KdTOWPJCnBy>

## Actividad 3: No todo se traslada con vectores desde el origen

### PROPÓSITO

Se pretende que los estudiantes exploren la diferencia entre un vector libre y un vector con punto de inicio en el origen del sistema de coordenadas; que visualicen la diferencia entre un cuerpo con y sin capacidad, y que apliquen dichos conocimientos para resolver problemas en contexto. Se espera que utilicen herramientas manuales o digitales.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 4.** Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

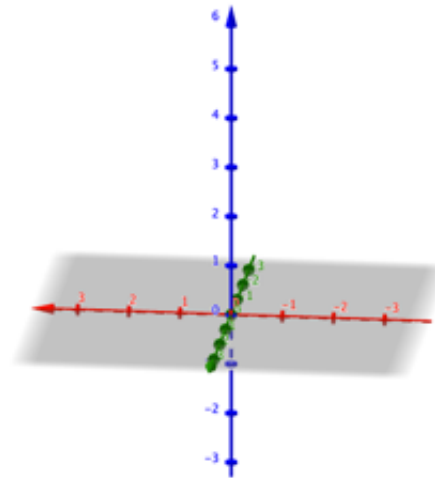
### EL VECTOR LIBRE

La arquitectura es el arte y la técnica de proyectar y construir edificios. Se encarga de modificar y alterar el ambiente físico para satisfacer las necesidades del ser humano. Los arquitectos no sólo se encargan de idear construcciones en función de su forma y utilidad, sino que también siguen preceptos estéticos.

En ese campo, el modelado 3D consiste básicamente en obtener la volumetría de los proyectos arquitectónicos para visualizarlos sin complicaciones antes que se los construya. De este modo, se pretende detectar incongruencias o simplemente tener una idea clara y anticipada de cómo lucirá la obra una vez que se materialice.

Si es posible, genera una simulación en 3D de una traslación con vectores libres, como se muestra en la siguiente imagen o busca en Geogebra algún recurso sobre traslación con vectores.

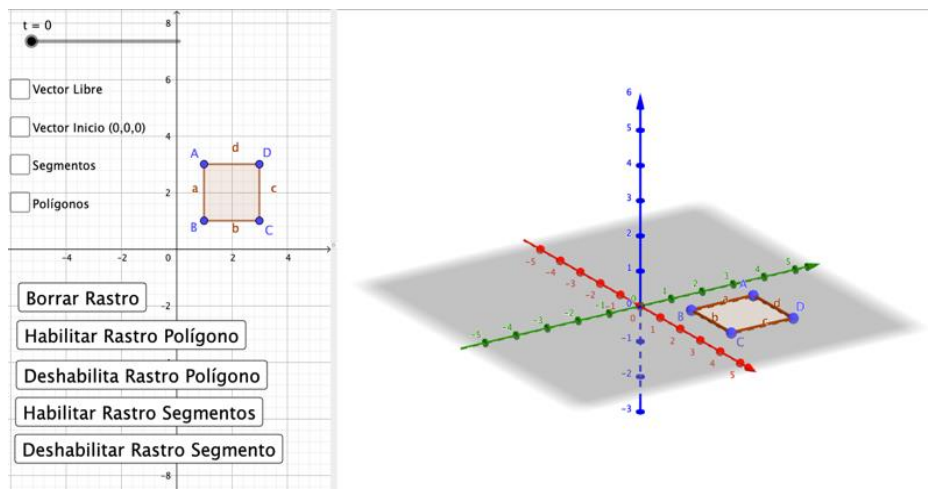




- ¿Qué diferencia surge al trasladar la figura 3D entre un vector libre y un vector ubicado desde el origen?
- ¿Qué diferencias relevantes tiene un vector libre respecto de uno ubicado desde el origen en la construcción de cuerpos en 3D?
- Para elaborar un prisma sin bases, ¿qué se debe trasladar en la figura realizada?
- Si contextualizamos la situación y comparamos la construcción de un prisma al trasladar polígonos y prismas al trasladar sólo segmentos, ¿qué aplicaciones tendría hacer esas estructuras para la vida cotidiana?
- Si se necesita un cuerpo de un prisma con capacidad, con un grosor de la estructura de 1 centímetro de ancho, ¿qué se debe considerar al construirlo para lograr dicho objetivo?
- Se traslada un triángulo equilátero con dimensiones de 4 cm por lado y vector de traslación  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ , el cual forma un prisma y un cuadrado con dimensiones de 2 cm por lado, centrado en el centro del triángulo, y un vector de traslación  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Grafica la situación y determina cuál es la razón entre las áreas de los prismas y luego, la razón entre los volúmenes.

## ¿CUÁL ES LA DIFERENCIA?

Utiliza GeoGebra para observar qué ocurre al trasladar un cuadrado como polígono o como segmentos de vectores libres y de vectores centrado en origen. Te puedes guiar por la siguiente imagen de Geogebra:



- Formula y verifica una conjetura relacionada con la forma que se obtendrá al trasladar la figura con un vector libre y con un vector con punto inicial en el origen.
- ¿Hay diferencias entre trasladar con un vector libre y un vector con punto inicial en el origen?
- ¿Cuál es la ventaja de trasladar con un vector libre?
- ¿Qué diferencias hay entre trasladar un polígono y trasladar los segmentos del cuadrado en el cuerpo resultante?

## SIMULANDO LA CONSTRUCCIÓN DE UNA CASA

Construyan un modelo de una casa de 1 piso, con alguna herramienta de geometría dinámica. Tomen en cuenta lo siguiente:

- La construcción debe tener una estructura de 0,2 unidades de grosor de las paredes y el piso.
- La estructura de la casa debe tener como base el plano “ $xy$ ” y un prisma rectangular, con largo por ancho por alto de capacidad de  $4 \times 3 \times 1$  unidades cúbicas.
- El techo debe estar inclinado hacia un lado de la casa y su grosor debe ser de 0,2 unidades.

1. Respondan:

- ¿Qué figuras planas se debe usar para simular el modelo de la casa?
- ¿Cuántos vectores se emplea en la construcción, como mínimo? ¿Cuántos deslizadores se necesita como mínimo para la construcción?
- Para considerar un espacio para la puerta principal, una puerta trasera y tres ventanas, ¿qué transformación(es) y elementos geométricos se debe considerar en la construcción?
- ¿Cuál es la capacidad, el volumen de las paredes y el piso y el volumen de la casa?
- Para construir una casa de 2 pisos cuyo primer piso sea igual que el segundo, ¿cuántos vectores se usará como mínimo?

## LA CASA DE DOS PISOS

Construye un modelo de una casa de 2 pisos, utilizando GeoGebra y la herramienta “Traslación” en la Vista Gráfica 3D, teniendo en cuenta lo siguiente:

- La construcción tiene que considerar una estructura de 0,2 unidades de grosor de las paredes y 0,3 el piso.
- La estructura de la casa debe tener como base el plano “ $xy$ ” y un prisma rectangular, con largo por ancho por alto de capacidad de  $5 \times 4 \times 2$  unidades cúbicas.
- La base debe contener, al menos, un espacio para una puerta y un espacio para una ventana.
- El segundo piso debe tener como base el techo del primer piso y se tiene que generar a partir de un prisma rectangular, con largo por ancho por alto de capacidad de  $4 \times 3 \times 2$  unidades cúbicas; una unidad del largo debe ser el techo del patio trasero.
- El techo debe estar inclinado hacia un lado de la casa y su grosor debe ser de 0,3.

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- En la primera actividad, en el caso de las preguntas a. y b., primero se debe trabajar con el recurso de GeoGebra, construyendo el mismo vector, pero con punto inicial en  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Los estudiantes deben observar que no hay diferencias al generar un cuerpo y que la magnitud, la dirección y el sentido son lo mismo; lo que cambia es solo el punto inicial y el punto final, por lo que no influye en la construcción del cuerpo en 3D.
- Tienen que notar que el vector libre y un vector ubicado en el origen es exactamente lo mismo, pero un vector libre permite organizar mejor el trabajo para las construcciones.
- En la tercera actividad (se sugiere que sea grupal), deben saber la diferencia entre capacidad y volumen; así podrán deducir que tienen que hacer la pared hacia el exterior de las dimensiones entregadas, incluso considerando 0,2 unidades hacia el eje  $z$  para el piso.
- En la tercera actividad (referente a la pregunta de vectores y deslizadores para 1 piso), tienen que considerar 3 vectores diferentes, pero un solo deslizador. Los vectores que se empleará son los del piso, las paredes y el techo. En el caso del deslizador, siempre será entre 0 y 1, por lo cual se puede utilizar sólo uno.
- En la actividad de la casa de 2 pisos, se necesita la misma cantidad de vectores y deslizadores que para la de 1 piso, ya que lo que cambia son las figuras planas, pero las dimensiones son las mismas. Por ende, al trasladar las figuras planas ubicadas en el techo del primer piso, usarán los mismos vectores de la construcción del primer piso en el segundo piso, considerando piso y muros.

6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
- Representan figuras 3D generadas al rotar o trasladar figuras planas, en forma manual y con herramientas digitales.
  - Explican de forma visual los procedimientos para generar figuras 3D a partir de figuras 2D.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- ¿Qué es y qué ventajas tiene la arquitectura 3D?  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://grupoaudiovisual.com/ventajas-arquitectura-3d/>

## Actividad 4: Rotar en el espacio

### PROPÓSITO

Los estudiantes exploran la diferencia entre una rotación en torno a una recta y una rotación en torno a los ejes coordenados. Diferencian entre el eje de rotación contenido en el polígono y el eje de rotación no contenido en él, y aplican estos conocimientos para resolver diversos problemas proactivamente y perseverando para hallar las respuestas. Se espera que utilicen las herramientas disponibles, ya sea de conocimientos anteriores o las relacionadas con habilidades manuales o digitales.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 4.** Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

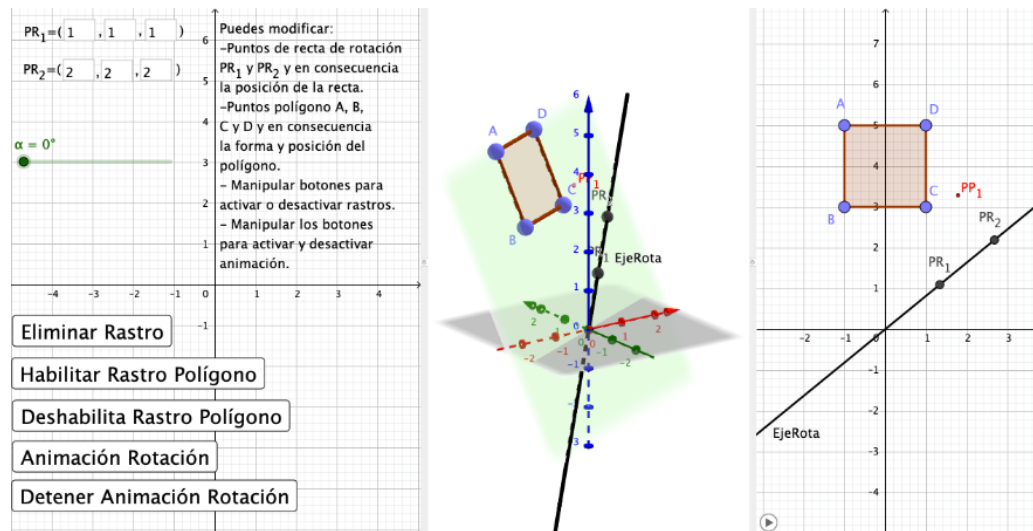
## DESARROLLO

### ROTANDO EN EL ESPACIO

La decoración de interiores o interiorismo consiste en diseñar una ambientación agradable y funcional para un espacio.

Una forma de hacerlo es crear anticipadamente un modelo en 3D del espacio a decorar y de los elementos que se incluirá, para visualizarlos sin complicaciones antes de materializar la decoración. La idea es ver la posibilidad de usarlos y su estética, y tener una idea clara de cómo lucirá el espacio decorado.

Utiliza alguna plataforma para visualizar la rotación de un cuadrado en torno a uno de sus lados y a una recta que está fuera del cuadrado. La siguiente imagen te puede dar una orientación para el trabajo con Geogebra.



- ¿Hay diferencia entre rotar un polígono en torno a una recta y rotarla en torno a los ejes coordenados?
- ¿Cuál es la ventaja rotar un polígono con una recta en vez de hacerlo en los ejes coordenados?
- ¿Qué diferencia hay entre rotar un polígono contenido en el eje de rotación y rotar un polígono o segmento que no está contenido en un eje de rotación?

## ROTACIÓN Y RECTAS

Si es posible dibuja manualmente o utiliza una plataforma geométrica para generar una rotación en el espacio de un segmento o polígonos sobre una recta.

- ¿Qué relevancia tiene agregar rectas en el espacio como eje de rotación para figuras planas al construir cuerpos en 3D?
- ¿Qué diferencia hay entre rotar una misma figura plana en una única posición en torno a un eje coordenado, y hacerlo en torno a una recta? ¿Qué diferencia hay entre que la figura plana esté contenida en el eje o recta y que no lo esté?
- ¿Se puede generar un mismo cuerpo en 3D rotando una figura plana en torno a los ejes cartesianos y rotando una figura plana en torno a una recta? Justifica tu respuesta.
- Para construir un cono truncado circular recto con capacidad de un 99% del volumen del cono, ¿qué se debe trasladar en la figura realizada?
- Si contextualizamos la situación y comparamos cómo se construye un cono al rotar un polígono contenido en el eje de rotación, y cómo se hace un cono al trasladar el polígono sin que esté contenido en el eje de rotación, ¿qué aplicaciones tendría construir esas diferentes estructuras? Nombra dos aplicaciones de cada una.

## SIMULANDO UNA LÁMPARA Y SUS DETALLES

1. Construyan un modelo de una lámpara de escritorio como la de la imagen:

Conexión  
interdisciplinaria:  
Artes  
OA 4, 3° y 4° medio



Para esto, utilicen alguna herramienta digital y tomen en cuenta lo siguiente:

- a. La base esté ubicada en el plano  $xy$  con centro en  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- b. La construcción debe incluir todo lo que muestra la imagen (por ejemplo: la ampolleta y el botón de encendido).
- c. Se debe considerar la escala de las piezas de la ampolleta; tiene que quedar estructuralmente lo más parecido posible a la imagen.

2. Anota las respuestas y compártelas con tu compañero:
  - a. ¿Qué figuras planas usaste para hacer el modelo de la ampolleta?
  - b. ¿Cuántas rectas se emplea como mínimo en la construcción? ¿Cuántos deslizadores se requiere como mínimo?
  - c. ¿Qué ecuaciones de las rectas usaste como eje de rotación para la construcción?
  - d. ¿Cuál es el volumen de la lámpara? ¿Qué cuerpos hay que considerar para calcular el volumen?
  - e. Para cambiar la posición del centro de la base de la lámpara al punto  $(1,1,5)$ , ¿qué ecuaciones de las rectas se debe utilizar?
  - f. ¿Por qué es relevante usar GeoGebra en esta situación? ¿Podría hacerse manualmente? ¿Cuáles son las ventajas o desventajas?

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se puede hacer variaciones de figuras con las mismas instrucciones, para ver dónde hay diferencias. Cabe notar que en la actividad se utiliza la misma figura geométrica en una única posición; lo que cambia es el eje de rotación, por lo cual hay una infinidad de posibilidades, dependiendo de cómo se posicionan dichos ejes. También se puede variar el eje de rotación y determinar entre qué eje de rotación intersecta o no al polígono.
2. Se sugiere que muevan el eje de rotación junto al polígono para que deduzcan que sí se puede lograr la misma figura. Más de un estudiante podría cuestionarse la situación dada; en ese caso, conviene sugerirles que, a partir de la recta construida, reconstruyan los ejes coordenados para que concluyan que han logrado construir un nuevo espacio.
3. Deben comprender que la diferencia entre trasladar polígonos no contenidos en el eje de rotación y contenidos en él, es que el primero genera un cuerpo con capacidad y el segundo, un cuerpo sólido.
4. En la tercera actividad, deben diferenciar los polígonos y rectas que usan para construir el modelo de la lámpara. Por ende, cabe señalarles al principio que elijan a un encargado para que haga esa distinción y anote los polígonos y rectas que van usando.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Representan figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas, en forma manual y con herramientas digitales.
  - Resuelven problemas que involucran calcular área o volumen de figuras 3D generadas por traslación y rotación de figuras 2D.
  - Discriminan entre diferentes figuras 2D que permiten generar determinadas figuras 3D.



## RECURSOS Y SITIOS WEB

### *Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Todo es Diseño (Documental – Diseño gráfico)  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.rendercgi.com/uso-la-imagen-3d-y-diseno-interior-3d/>
- El uso de la imagen 3D o la fotografía real en el diseño de un interior 3D  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=kzilrEOSBNI>
- Todo es Diseño (Documental – Diseño gráfico)  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=kzilrEOSBNI>

### Actividad de evaluación

#### Objetivos de Aprendizaje

**OA 4.** Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

#### Indicadores de evaluación

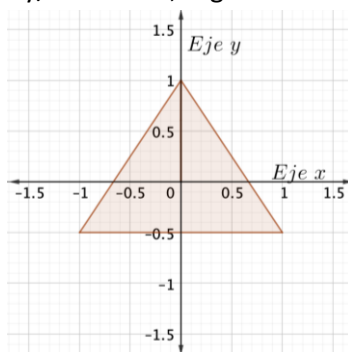
- Representan figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas, en forma manual y con herramientas digitales.
- Resuelven problemas que involucran calcular área o volumen de figuras 3D generadas por traslación y rotación de figuras planas.
- Describen el proceso para representar cuerpos generados por rotación o traslación de figuras 2D, utilizando herramientas tecnológicas.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

### CAMBIANDO DEL 2D AL 3D

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 3, cada una por sí misma o en conjunto. Conviene que trabajen algunas en equipo para que discutan y propongan estrategias para llegar a la o las soluciones posibles.

1. Dibujando manualmente o usando GeoGebra y considerando la siguiente figura plana, grafica el cuerpo resultante de la traslación y/o rotación, según se indica.



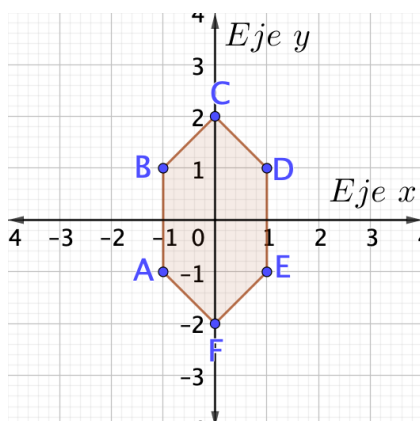
a. Trasladar en $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	b. Trasladar en $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
c. Trasladar en $\vec{v}$ y luego $\vec{u}$	d. Trasladar en $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
e. Rotar en $y = -1$ , en $360^\circ$	f. Rotar en $x = -1$ , en $360^\circ$
g. Trasladar en $\vec{v}$ y luego rotar en torno a $x = -1$ , en $360^\circ$	

2. Con base en lo que hiciste, responde las siguientes preguntas:
  - a. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del cuerpo resultante en a. y b.?
  - b. Considerando la respuesta anterior, ¿cuáles son el área y el volumen de los cuerpos obtenidos?
  - c. ¿Qué puedes inferir de las traslaciones realizadas de  $\vec{v}$  y luego  $\vec{u}$ , en comparación con la traslación hecha con  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ ?
  - d. ¿Qué diferencia a las rotaciones e. y f. en la figura plana y cómo repercute en el resultado del cuerpo generado?
  - e. Justifica la veracidad o falsedad de la siguiente conjetura: “Si se modifica cualquiera de los vértices del triángulo luego de realizar g, se obtiene un cuerpo cerrado”.

### LAS LONGITUDES DE LAS TRES DIMENSIONES

#### I. Traslación de figuras planas

1. Una empresa de lácteos está considerando fabricar un nuevo tipo de caja de leche y, para ello, utiliza el siguiente modelo:



- a. Traslada la figura según el vector  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  y determina las coordenadas de los vértices del cuerpo generado.
  - b. Teniendo en cuenta lo realizado en a., determina el volumen del cuerpo.
  - c. Teniendo en cuenta lo realizado en a., calcula el volumen que representa el cartón para que la capacidad de la caja sea de un 95%.
  - d. Si se aumenta en un 20% la longitud del vector de traslación, ¿cuánto aumentará el volumen del cuerpo?
2. Basado en la figura plana del ejercicio anterior:
    - a. Rota la figura en  $90^\circ$  respecto de  $\overline{AB}$ , la figura plana que ya había sido trasladada.
    - b. Determina las coordenadas de los vértices de la figura generada.
    - c. Describe qué procedimiento seguir para calcular el volumen del cuerpo generado y calcúlalo.
    - d. Suponiendo que la caja mencionada se modifica con la rotación, ¿cuál es el volumen que representa el cartón para que la capacidad de la caja sea un 96%?

## SIMULANDO LA REALIDAD EN MODELOS 3D

1. Consideraremos modelos a escala y nos acercaremos a la realidad por medio de la proporcionalidad. Para esto, construye un modelo a escala en GeoGebra a partir de figuras planas de:
  - a. Una mesa
    - i. ¿Qué figuras planas utilizaste?
    - ii. Describe el procedimiento que seguiste para construir.
    - iii. ¿Qué dimensiones usaste y cuáles serían sus proporciones reales?
  - b. Una silla
    - i. ¿Qué figuras planas utilizaste?
    - ii. Describe el procedimiento que seguiste para construir.
    - iii. ¿Qué dimensiones usaste y cuáles serían sus proporciones reales?
  - c. Un vaso
    - i. ¿Qué figuras planas utilizaste?
    - ii. Describe el procedimiento que seguiste para construir.
    - iii. ¿Qué dimensiones usaste y cuáles serían sus proporciones reales?
  - d. Un plato
    - i. ¿Qué figuras planas utilizaste?
    - ii. Describe el procedimiento que seguiste para construir.
    - iii. ¿Qué dimensiones usaste y cuáles serían sus proporciones reales?
  - e. Una mesa y una silla ubicadas dentro de un mismo plano y sobre la mesa, un plato y un vaso.
    - i. ¿Qué figuras planas utilizaste?
    - ii. Describe el procedimiento que seguiste para construir.
    - iii. ¿Qué dimensiones usaste y cuáles serían sus proporciones reales?

**PAUTA DE EVALUACIÓN**

Criterios de evaluación	Niveles de logros		
	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Representan figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas, en forma manual y con herramientas digitales.			
Resuelven problemas que implican calcular el área de figuras 3D generadas por traslación y rotación de figuras planas.			
Resuelven problemas que implican calcular volúmenes de cuerpos inscritos en otros cuerpos y la razón entre estos volúmenes.			
Describen el proceso para representar cuerpos generados por rotación o traslación de figuras 2D, utilizando herramientas tecnológicas.			

# Unidad 4

## Unidad 4: Los objetos con sus caras y perspectivas

### Propósito de la unidad

Se pretende que los estudiantes comprendan cómo el hecho de aplicar conceptos geométricos – proyecciones, perspectivas, cortes, etc.– ha permitido resolver problemas de la arquitectura, el diseño y la construcción. Algunas preguntas que pueden orientar el desarrollo de esta unidad son: ¿Cómo describir o representar las características de un objeto? ¿Cómo representa la geometría objetos o fenómenos? ¿Cómo permitió la geometría resolver problemas emblemáticos de la arquitectura, el diseño y la construcción?

### Objetivos de Aprendizaje

#### OA 3.

Resolver problemas que involucren relaciones entre figuras 3D y 2D, en las que intervengan vistas, cortes, proyecciones en el plano o la inscripción de figuras 3D en otras figuras tridimensionales.

**OA 5.** Diseñar propuestas y resolver problemas relacionados con perspectiva, proyección paralela y central, puntos de fuga y elevaciones, tanto en arte como en arquitectura, diseño o construcción, aplicando conceptos y procedimientos de la geometría 3D.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

## Actividad 1: Representar formas 3D en dos dimensiones

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes exploren conceptos básicos vinculados con representar objetos tridimensionales en figuras de dos dimensiones; que resuelvan problemas que involucren vistas, cortes, proyecciones y perspectivas, y que apliquen esos conocimientos para diseñar objetos tridimensionales, en forma manual y con herramientas digitales.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 3.** Resolver problemas que involucren relaciones entre figuras 3D y 2D en las que intervengan vistas, cortes, proyecciones en el plano o la inscripción de figuras 3D en otras figuras tridimensionales.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### LA CAJA DE HUEVOS

Los huevos tienen casi la misma forma y su transporte se convirtió en un problema cuando el autoabastecimiento desapareció en las sociedades desarrolladas (durante el siglo XX). Trasladar alimentos hasta el lugar de residencia se convirtió entonces en una prioridad y los huevos eran los víveres más frágiles.



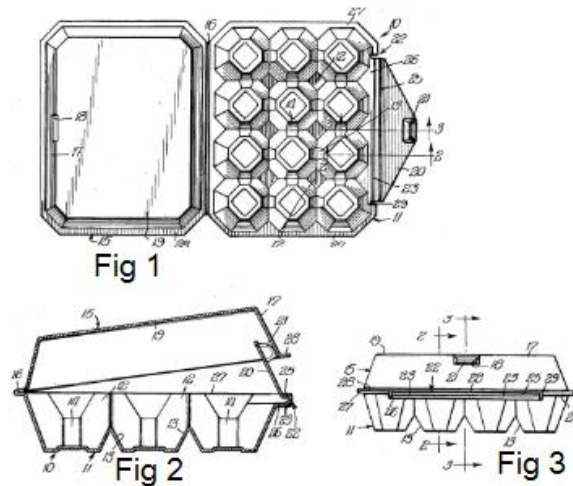
En 1911, el editor canadiense Joseph Coyle comenzó a experimentar con el plegado de cartón para evitar los habituales daños que sufrían los huevos durante el transporte entre las granjas rurales del valle y las ciudades. La eficacia de su invento lo llevó a dedicarse a

construir estos recipientes durante ocho años. Posteriormente debió ceder los derechos de su invento a los empresarios que habían invertido, quienes comenzaron a exportarlo a todo el mundo.

Conexión  
interdisciplinaria:  
Arte  
OA 4, 3° y 4° medio



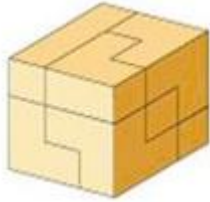
1. Considerando el contexto anterior, responde las siguientes preguntas:
  - a. ¿Cuál crees que es el origen del diseño de un objeto?
  - b. ¿Qué importancia le otorgas al diseño de la caja de huevos?
  - c. ¿Qué características tiene el diseño de la caja de huevos que lo transformó en un objeto tan útil?
  - d. Al observar la figura 1, ¿qué vista de la caja identificas? ¿Y en la figura 2? ¿Y en la figura 3?



## EL CUBO SOMA

1. Observa a tu alrededor y elije un objeto; puede ser un lápiz, un estuche, la mesa u otro que consideres interesante.
  - a. Dibuja con la mayor precisión posible sus 3 vistas: alzado (de frente), planta (desde arriba) y perfil (desde un lado).
  - b. Comparte tu trabajo con un compañero y comenta las dificultades que enfrentaste para dibujar cada vista.

2. El cubo soma es un rompecabezas formado por 7 piezas tridimensionales compuestas por cubos unitarios, que deben ser ensambladas para formar un cubo de 3 x 3. La siguiente imagen muestra las piezas que lo conforman. Determina las vistas (frente, planta y perfil) de cada una de ellas y completa la tabla:



	Alzado (de frente)	Planta (desde arriba)	Perfil (desde un lado)

3. Un microempresario de juegos de ingenio de madera desea vender su producto a mayor escala, por lo que necesita crear un envase de cartón para los cubos soma.

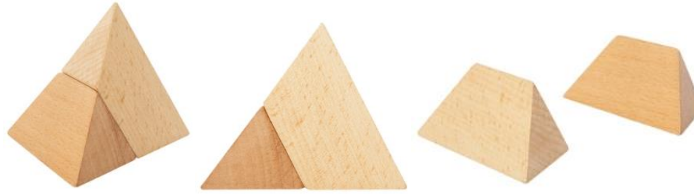


Considerando el contexto, responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué características debería tener la caja?
- ¿Qué forma crees que es la más conveniente y por qué?
- ¿Cómo convendrá envasar el cubo: armado o desarmado? ¿Por qué?
- Considerando las preguntas anteriores, diseña una caja según las dimensiones necesarias para cuidar el producto y la propia caja, con el menor gasto posible en el material. Para ello, haz la construcción geométrica de las vistas de la caja.
- Si se quiere duplicar el tamaño del cubo soma, ¿cómo deberían variar las dimensiones de la caja? Fundamenta.
- El precio de cartón gris es de \$500 los 0,25 m<sup>2</sup>. ¿Cuánto dinero gasta por cada caja con las medidas originales?
- ¿Cuánto dinero gasta con la caja modificada?
- ¿Cuánto dinero más gasta en una entrega de 100 cubos soma al modificar las dimensiones de la caja?

## DESCRIBIENDO OBJETOS

Observa la siguiente figura: está compuesta por dos sólidos iguales que, al ensamblarlos, forman una pirámide de base cuadrada.

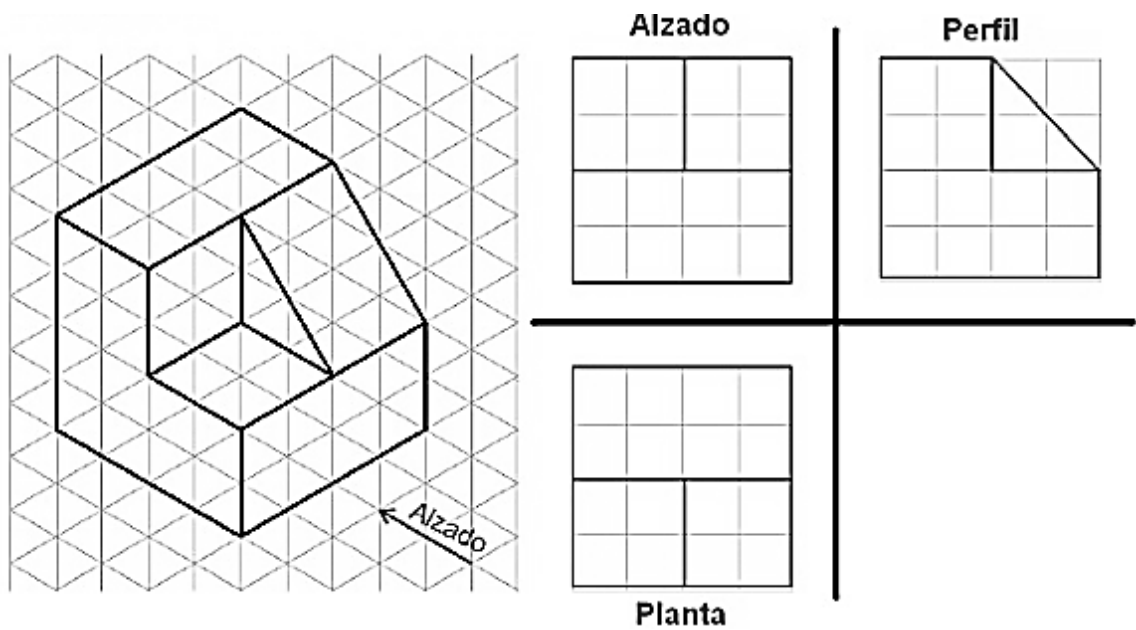
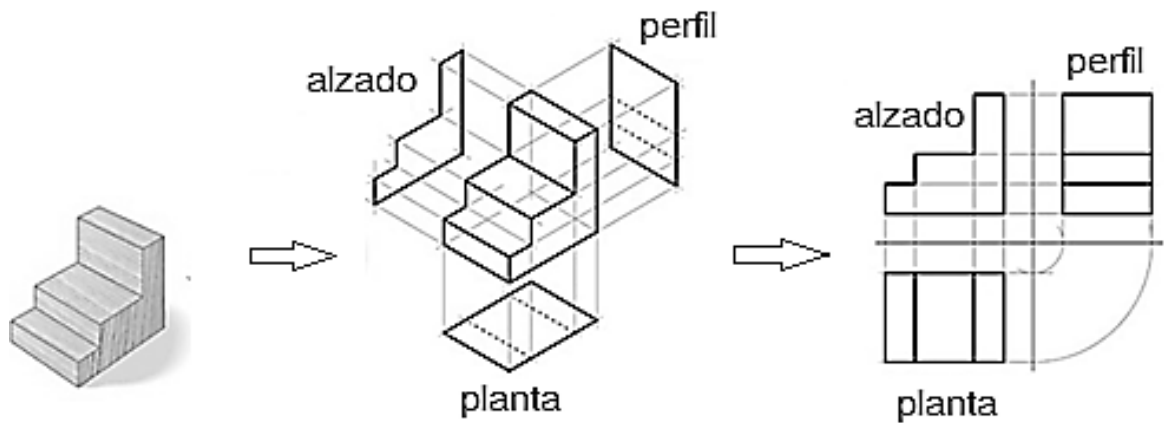


- Dibuja las vistas principales de los trozos de madera que componen la pirámide.
- Dibuja las vistas principales de la pirámide, considerando sus cortes.
- Creá un nuevo rompecabezas, realizando otros cortes a una pirámide de base cuadrada (puedes hacer el modelo con plastilina).

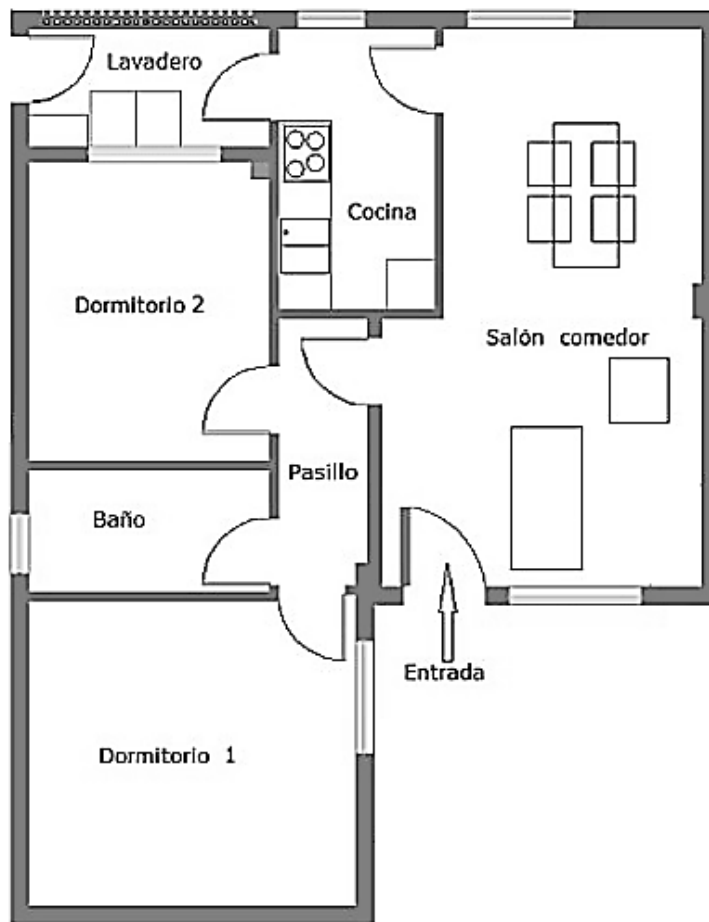
Se sugiere realizar la siguiente actividad en forma grupal.

### DISEÑO DE PIEZAS

1. Dibujen las piezas de forma manual o utilizando un software, se sugiere el software Sketchup.



2. De acuerdo al siguiente diseño dibuja las vistas de la casa, asignando las dimensiones que consideres conveniente.



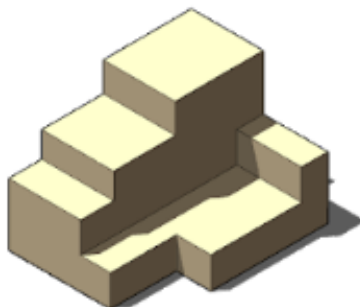
- Comparen con sus compañeros las dimensiones que usaron y el aspecto de las distintas vistas de la casa.
- En grupos de 4 integrantes, seleccionen un lugar de la casa de la cual se harán cargo para hacer su representación tridimensional en una maqueta.



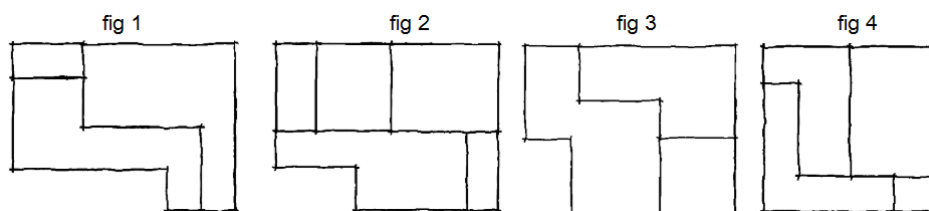
## IDENTIFICANDO VISTAS

Las actividades tienen como principal propósito que los jóvenes identifiquen la planta, el alzado y el perfil de una pieza sólida, o en la proyección de un plano aplicado para resolver problemas. A fin de evaluar si han logrado dichas habilidades, se puede formular las siguientes preguntas:

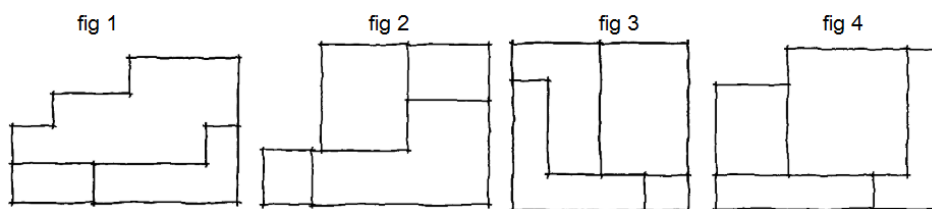
Observa la siguiente imagen de una pieza sólida:



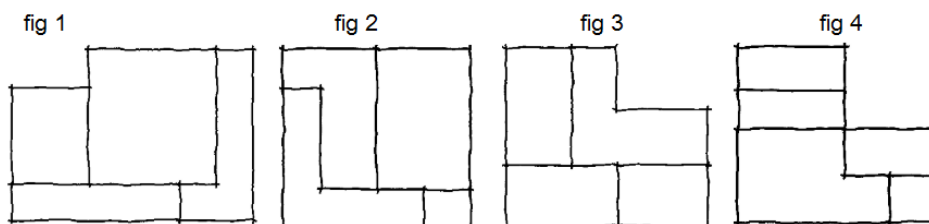
a. ¿Cuál de los siguientes croquis corresponde a la planta de la pieza?



b. ¿Y al alzado?



c. ¿Y al perfil?



## CONSTRUYENDO UN DOMO

Observa la siguiente construcción de un domo:



Este tipo de construcción también se usa para la vivienda.

- Para hacer una réplica en miniatura, ¿qué aspectos debes considerar?
- Elabora una maqueta con palos de helado o de maqueta.
- ¿Cómo son sus vistas principales? Dibuja un croquis de cada una.

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- En la primera actividad, es importante guiar la reflexión y el trabajo para que comprendan las ideas básicas del diseño; por ejemplo: rescatar que el diseño surge de una necesidad que hay que cubrir de la mejor forma posible y a un bajo costo.
- Puede agregar otras preguntas para que identifiquen variables que determinan el diseño de un objeto. Es importante recalcar que todo se origina por una idea que se plasma en un papel; es decir, en una figura bidimensional. De allí la importancia de las vistas que darán vida al objeto tridimensional; en nuestro caso, el envase para los huevos.
- La actividad del cubo soma comienza con una experimental, que consiste en observar las distintas vistas de un objeto. Como verán representaciones planas de objetos tridimensionales, es importante que observen un objeto que puedan manipular e identificar sus diferentes vistas, y que a partir de objetos 3D, puedan pasar a objetos 2D.
- Luego se los invita a analizar las piezas de un juego de ingenio que pueden conseguir fácilmente en el mercado. De todas maneras, se les muestra las 7 piezas del juego para que analicen sus vistas y dimensiones y se les indica que debe corresponder a un cubo de 3 x 3. El desafío consiste en construir cada pieza al doble de tamaño original.
- La idea de la actividad final –diseñar un envase para transportar los cubos soma– es conectarla con la actividad inicial, de modo que recuerden la reflexión y los criterios descubiertos en torno al diseño de objetos, y los apliquen; para ello, deberán crear un objeto 3D a partir de figuras 2D. Se sugiere visitar plantillas de cajas en páginas web.

6. Se propone desarrollar la actividad de diseñar planos de casas, mediante un programa orientado a representar objetos tridimensionales. Se sugiere Sketchup –programa informático de diseño y modelaje en 3D para entornos arquitectónicos–, que permite conceptualizar y modelar imágenes en 3D de edificios, vehículos, personas y cualquier objeto o artículo según la imaginación del diseñador o dibujante. Los estudiantes podrán elaborar las vistas de una casa a partir del plano de planta. El trabajo termina con la construcción de la maqueta de la casa, a partir de las dimensiones que entrega el programa.
7. Es importante que el docente promueva el aprendizaje por medio de nuevas formas de trabajar; esto implica que se focalicen en la forma de pensar, comunicarse, aprender, desplegar la creatividad y usar la tecnología para desarrollar habilidades que les permitan participar en el mundo.
8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Leen e interpretan información de formas 3D, representadas en diferentes vistas o sistemas de representación.
  - Resuelven problemas que involucran interpretar vistas, cortes, perspectivas y proyecciones.
  - Diseñan propuestas que permitan modelar problemas propios del arte, la arquitectura, el diseño o la construcción.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

### *Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Diseño de cajas  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://issuu.com/designpackaging/docs/packaging-dielines-free-book-design>
- Construcciones geométricas  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/N5xzxPPe#material/kUK3rNAP>
- Diseño de figuras 3D  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.sketchup.com/es>



## Actividad 2: Representar cortes y secciones en el diseño y la creación de diversos objetos

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes valoren el aporte de la geometría en los diferentes campos del diseño, y que destaquen la importancia del diseño y de las representaciones 2D de la estructura antes de construir realmente en 3D. Se pretende que resuelvan problemas que involucren conceptos como calcular el volumen de cuerpos que se puede descomponer en prismas o cilindros, volúmenes de figuras tridimensionales interceptadas con otras figuras tridimensionales y la representación 2D de cortes y secciones de piezas sólidas.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 3.** Resolver problemas que involucren relaciones entre figuras 3D y 2D en las que intervengan vistas, cortes, proyecciones en el plano o la inscripción de figuras 3D en otras figuras tridimensionales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de tareas colaborativas y en función el logro de metas comunes.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

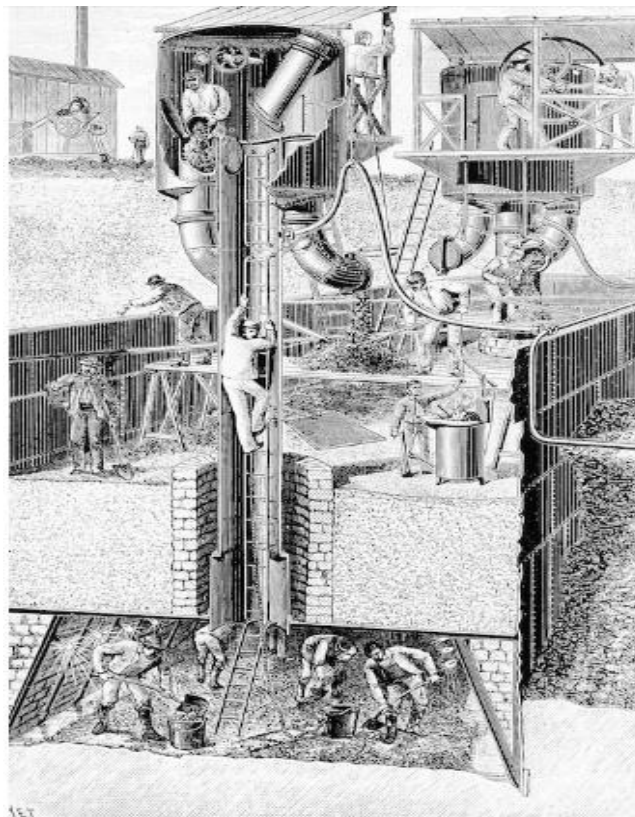
### PIEZAS CLAVES EN LA CONSTRUCCIÓN

Los ingenieros crean diseños de piezas de maquinaria, estructuras o circuitos que necesitan piezas mecánicas o partes de máquinas para construir un modelo provisional o modificar diseños, lo que implica cambiar dimensiones y materiales para alcanzar los objetivos de la construcción, sobre la base de la seguridad, el valor y la funcionalidad.

La construcción de la torre Eiffel en cifras:  
 18 038 piezas metálicas  
 5 300 planos de taller  
 50 ingenieros y delineantes  
 150 obreros en la fábrica de Levallois-Perret  
 Entre 150 y 300 obreros en la obra  
 2 500 000 roblones  
 7 300 toneladas de hierro  
 60 toneladas de pintura

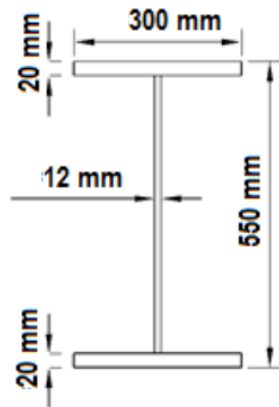
1. Respecto del contexto anterior, organicen su grupo según las diferentes tareas y habilidades de cada integrante y averigüen qué tipo de sujeción se usó para erigir la Torre Eiffel (también pueden buscar otra construcción).
  - a. El siguiente grabado muestra el corte de uno de los pozos excavados para construir los cimientos de la torre Eiffel.
  - b. Comenta con tu compañero: ¿cómo aporta la representación bidimensional en la construcción?

Conexión  
interdisciplinaria:  
Artes  
OA 4, 3° y 4° medio

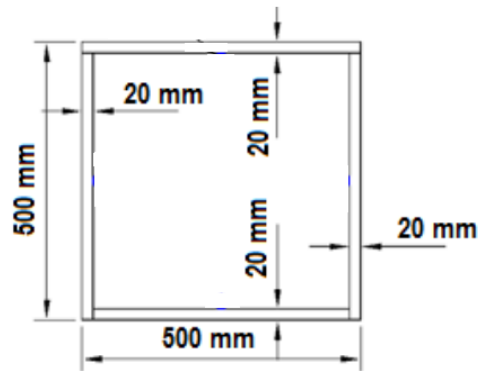


[https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.nationalgeographic.com.es/historia/grandes-reportajes/torre-eiffel-construccion-coloso\\_11345/8](https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.nationalgeographic.com.es/historia/grandes-reportajes/torre-eiffel-construccion-coloso_11345/8)

2. Se requiere saber qué cantidad de material se usará para construir una losa. Se empleará principalmente dos tipos de vigas de acero, como muestra la siguiente figura:



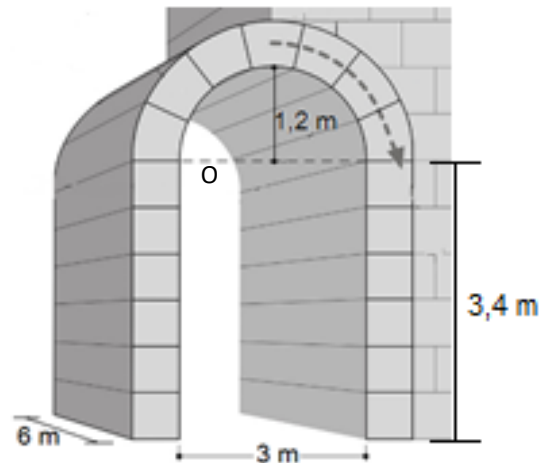
Viga 1



Viga 2

- Considerando que cada viga mide 6 m, ¿cuánto acero se usará en cada una? Argumenta.
  - Si el peso de un metro cúbico de acero es de  $76,93 \text{ N/m}^3$ , ¿cuánto pesa cada viga? Explica el procedimiento que usaste.
  - Comenta con tu compañero la importancia que tienen estas piezas para construir grandes estructuras, como las torres de alta tensión.
3. La ingeniería civil estudia el diseño y analiza las estructuras que soportan cargas como los edificios, para garantizar la seguridad de las personas que usarán la obra.

En un proyecto, se necesita saber qué cantidad de ladrillos se necesita para construir un pasillo con un techo tipo "arco redondo". Según la imagen, considerando las medidas que debe tener el pasillo y que el punto O es el centro de la semicircunferencia, ¿cuántos ladrillos se usará aproximadamente en la estructura? (medidas de un ladrillo  $25 \times 12 \times 5 \text{ cm}$ )



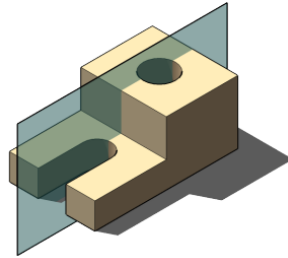
## ESTUDIANDO EL DISEÑO DE PIEZAS

En las grandes estructuras, cobra vital importancia el diseño y la construcción de piezas mecánicas que cumplen distintas funciones dentro de estas estructuras.

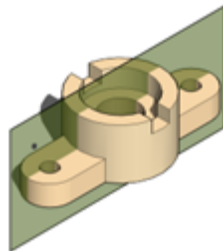


1. Observen las siguientes imágenes y representen el corte en cada una. Expliquen el procedimiento utilizado para resolver el ejercicio.

I.

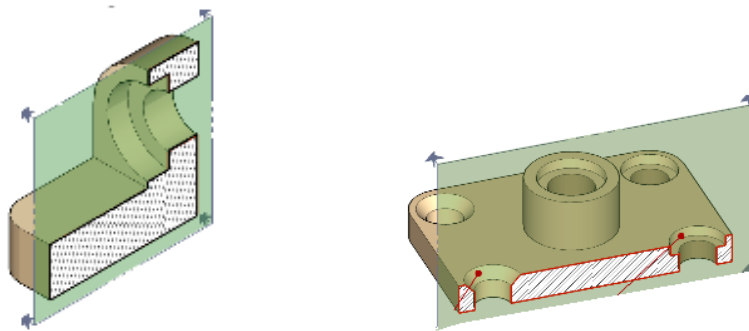


II.



- a. Comparen el procedimiento utilizado y sus resultados en cada uno de los ejercicios.
- b. ¿Qué características tiene el plano de corte que se aplica a cada pieza?
- c. ¿Conviene usar otro plano de corte? ¿Cuál? Diseña un dibujo que explique tu respuesta.

2. Considerando las siguientes imágenes de cortes, representa las secciones de cada imagen.

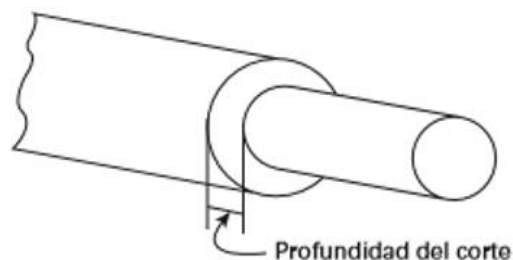


Observando ambas figuras, responde:

- ¿Qué características tiene una sección? Explican.
- ¿Cuál es la diferencia entre un corte y una sección? Explica.
- ¿Cuál es la importancia de la representación gráfica bidimensional para diseñar piezas tridimensionales? Fundamenta.
- Comenten la importancia del dibujo técnico para construir estas piezas mecánicas.

### MEDICIONES DE UNA PIEZA

1. Observa la siguiente imagen de una pieza metálica con forma cilíndrica de 0,41 cm de diámetro, que se reduce a 0,34 cm de diámetro.

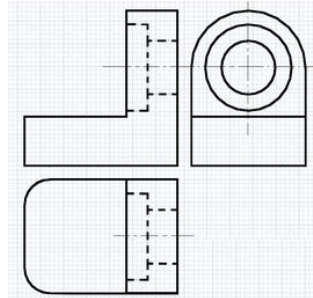
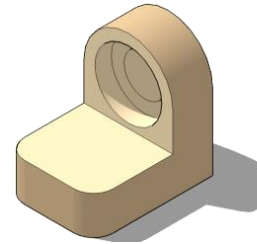


- ¿Cuál fue la profundidad del corte? Explica el procedimiento utilizado.
- Si la pieza mide 10 cm de longitud, ¿cuánto material se ha desperdiciado en 500 piezas? Explica el procedimiento utilizado.

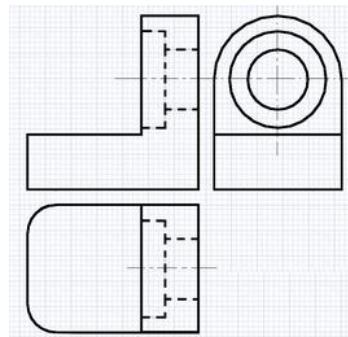
## ANALIZANDO PIEZAS

Observa la siguiente pieza y responde:

- Para hacer visibles las partes interiores de la pieza, ¿qué plano de corte debes trazar? Explica.
- Este plano de corte, ¿es el más apropiado para representar la pieza con el menor número de vistas posibles? Fundamenta.
- Identifica las vistas de la pieza en la siguiente imagen.

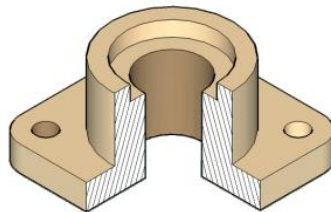


- Representa el corte, identificando el plano de corte según corresponda:



## OTROS PLANOS DE CORTE

- Observa la siguiente imagen:



¿Qué tipo de corte se ha aplicado a la pieza? Fundamenta, usando representaciones planas e indicando el ángulo del corte.

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. En la primera actividad, es importante guiar la reflexión y el trabajo para que valoren el aporte de la geometría en los diferentes campos del diseño; en este caso, la ingeniería.
2. Se recomienda que les pida averiguar un poco de historia respecto de la construcción de la Torre Eiffel (¿cuánto duró la construcción?, inconvenientes y aciertos, materiales utilizados) y que destaquen la importancia del diseño y de las representaciones 2D de la estructura antes de la construcción real.
3. En la primera actividad, se pretende que elaboren y apliquen estrategias para calcular volúmenes de figuras tridimensionales intersectadas con otras figuras tridimensionales; por ejemplo: determinar la diferencia del volumen de dos prismas me permite obtener el volumen de la viga 2.
4. En la actividad 2 de “Piezas claves en la construcción”, se sugiere que averigüen la mejor forma de ubicar los ladrillos para cumplir con lo solicitado. En este caso, guíe la reflexión para que puedan comparar y validar sus resultados.
5. En la siguiente actividad, se propone un contexto relacionado con el diseño de piezas de ingeniería, donde se solicita que representen un corte total y una sección de piezas sólidas, dado el plano de corte. Puede solicitarles que traigan una pieza de construcción simple (como un perno, rodamiento, tornillo, tuerca etc.) para que hagan representaciones 2D de la pieza a escala, utilizando los conceptos aprendidos.
6. Lo importante son las argumentaciones, reflexiones y discusiones de cómo diferencian un concepto de otro, la utilidad de estos conceptos en el diseño y la construcción de estas piezas, su relación con el dibujo técnico, el aporte de éste en el diseño y la creación de piezas para construir otras estructuras o piezas en la ingeniería y la arquitectura.
7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Representan objetos 3D, utilizando diferentes vistas o sistemas de representación.
  - Leen e interpretan información de formas 3D, representadas en diferentes vistas o sistemas de representación.
  - Resuelven problemas que implican interpretar vistas, cortes, perspectivas y proyecciones.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Construcciones tipo arco  
<http://www.didatticarte.it/Blog/?p=2873>

## Actividad 3: Representar proyecciones en el plano

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes resuelvan problemas, dibujando perspectivas de formas básicas a un punto de fuga con el método de la geometría proyectiva, para determinar la deformación de las dimensiones a partir de la variación de la distancia entre el observador y el plano representado.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 5.** Diseñar propuestas y resolver problemas relacionados con perspectiva, proyección paralela y central, puntos de fuga y elevaciones, tanto en arte como en arquitectura, diseño o construcción, aplicando conceptos y procedimientos de la geometría 3D.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### CONSTRUCCIÓN PROYECTIVA DE IMÁGENES

La finalidad de aplicar perspectiva en un dibujo es crear la ilusión de profundidad, para ver un espacio tridimensional en una superficie plana bidimensional. Lo que los artistas visuales presentan ante el público no es la realidad, sino un reflejo de ella, a fin de hacerla mucho más interesante y atractiva para el receptor.

Conexión  
interdisciplinaria:  
Artes OA 3,  
3° y 4° medio





En la imagen, los rieles de la línea del tren son horizontales. Parece que se unieran al final en un solo punto, aunque sabemos –debido a nuestra experiencia– que son paralelas y no convergen.

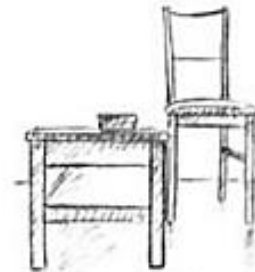


En los edificios donde todas las líneas son verticales ascendentes, pareciera ser que el horizonte está en el cielo; claramente, es más un concepto de percepción que geográfico.

- Mira a tu alrededor y busca un objeto. Describe en palabras como ves este objeto y comenta con tu compañero que está ubicado en otra posición del objeto.
- Dibuja o bosqueja lo que ves desde tu punto de vista, diferenciando entre dos dibujos una vista completa del objeto y otra en perspectiva.
- ¿Cuáles son las diferencias entre el dibujo en perspectiva con el dibujo completo?
- Compara los bosquejos con tu compañero ¿cuáles se parecen más? ¿cuáles se ven diferentes?

## PERSPECTIVAS

- Observa las siguientes imágenes y contesta las preguntas:



- Dibuja las rectas proyectivas para determinar el punto de fuga en cada imagen.
- ¿Qué ha cambiado en cada imagen que hace que se perciba de manera diferente?
- ¿Qué elementos hay que considerar para proyectar un objeto tridimensional en un plano?

2. En los siguientes paisajes:



- Resalta con color las rectas proyectivas y los puntos de fuga en cada imagen.
- Marca la línea del horizonte en cada imagen.
- Explica dónde se ubica el punto de fuga en relación con el horizonte.
- Las líneas paralelas proyectantes, ¿siempre tienen un mismo y único punto de fuga? Explica.
- Argumenta sobre la veracidad o falsedad de la siguiente conjetura, utilizando representaciones: "De un mismo objeto se puede obtener proyecciones a uno, dos o tres puntos de fuga, cambiando el punto de vista".

### PROYECCIONES DE UN DADO

Observa la siguiente imagen:



dado 1



dado 2



dado 3

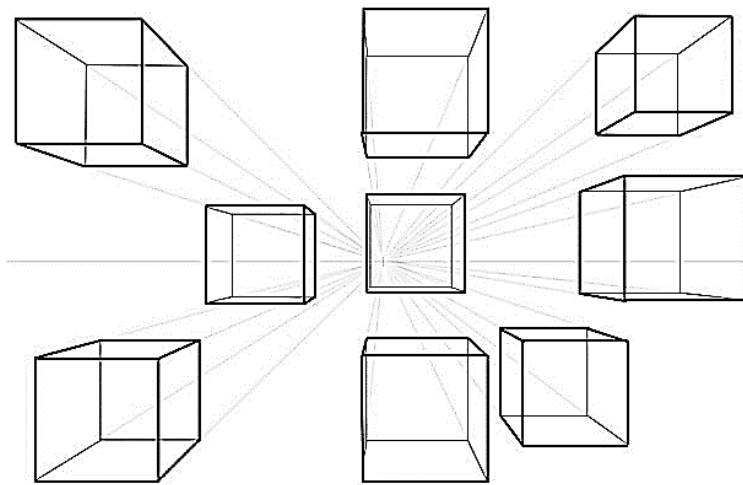


dado 4

- Explica qué elementos determinan que se visualice distintas caras de una misma figura; en este caso, el dado.
- ¿Se puede obtener proyecciones de un mismo objeto a uno, dos o tres puntos de fuga, cambiando el punto de vista? Argumenta.

## CREANDO UN MURAL

Explica los pasos que deberías seguir para hacer el siguiente dibujo geométrico, formado por cubos en distintas perspectivas, en un muro. Haz una réplica del dibujo a escala, considerando que el muro mide 4 m de largo y 2 m de alto.

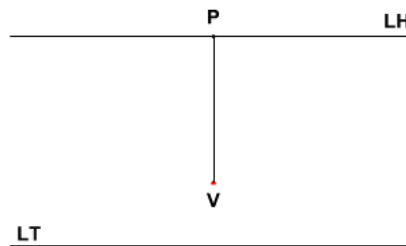


Conexión  
interdisciplinaria:  
Artes OA 3  
3° y 4° medio

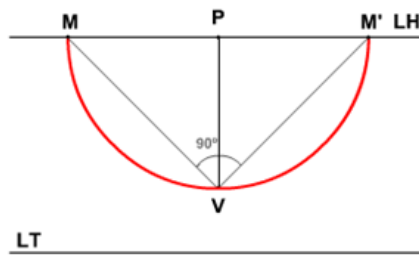
## CONSTRUCCIÓN PROYECTIVA DE UN CUBO

Con los siguientes pasos podrán construir un cubo en perspectiva cónica frontal.

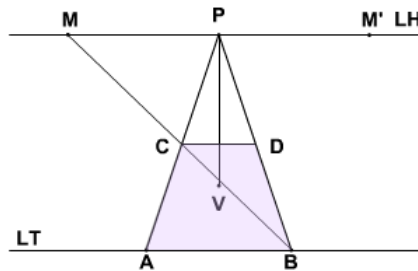
- En un plano, definan la línea de horizonte (LH) y la línea de tierra (LT)



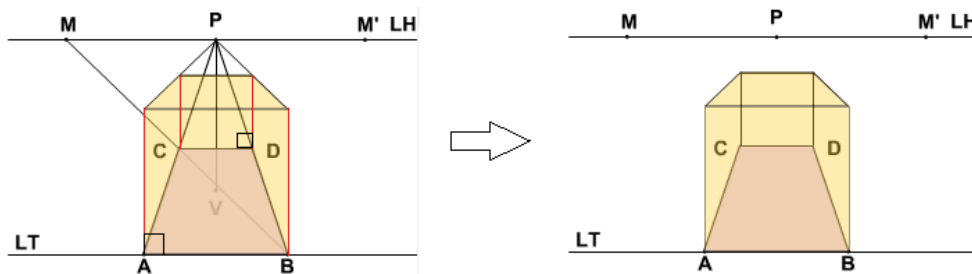
- b. Ubiquen el punto focal (P) en la línea de horizonte y la distancia a la que se ubica del punto de vista (V). Luego dibujen un semicírculo con centro en P y definan los puntos M y M'.



- c. Tracen las rectas MV y M'V y determinen los vértices A, B, C y D del cubo.



- d. Tracen perpendiculares a las rectas AB y CD, que pasen por los puntos A, B, C y D del cubo, para obtener:



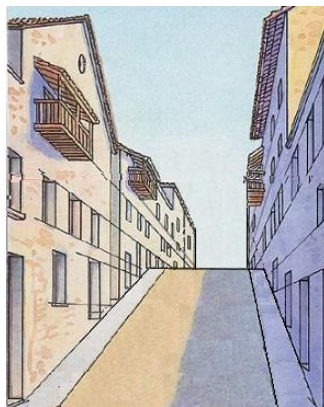
- e. ¿Qué particularidad tienen las aristas que fugan en un mismo punto? Desplacen la figura y comprueben si dicha particularidad se mantiene. Fundamenten.
- f. Al modificar las dimensiones de la base AB del cubo, ¿qué función cumplen los puntos M y M'?
- g. Al bajar la altura de la línea de horizonte (LH), de forma que el cubo quede por encima de esa línea, ¿pueden ver las mismas caras del cubo que antes? Expliquen.
- h. ¿Qué ocurre cuando la línea de horizonte está más baja que la altura del cubo?
- i. Si se modifica el punto de visión (V), ¿cómo influye la distancia del espectador en la percepción visual?
- j. ¿Qué importancia tiene la geometría proyectiva en el diseño?

## ANALIZANDO IMÁGENES

1. Dibuja las líneas proyectivas para determinar los puntos de fuga en la siguiente imagen:



- a. ¿Qué posición debe asumir el observador respecto del horizonte para distinguir las líneas paralelas que se proyectan a un punto de fuga?
2. Averigua los puntos de fuga en la siguiente imagen y explica si puede existir más de un sistema de proyecciones a un punto de fuga.



Conexión disciplinar:  
Artes OA 4,  
3° y 4° medio

3. Observa la siguiente imagen:



- ¿Cómo son las alturas  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  y  $h_4$  destacadas del edificio? Explica tus apreciaciones a un compañero y luego fundamenta matemáticamente.
- ¿Cómo son las distancias  $d_1$  y  $d_2$  entre los edificios? Explica a tu compañero y anota los pasos de tu explicación en tu cuaderno.

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- En la primera actividad, es importante guiar la reflexión y el trabajo para que valoren el aporte de la geometría en los diferentes campos del diseño; en este caso, artes visuales.
- La primera actividad tiene por objeto que, aplicando estrategias de geometría proyectiva, los estudiantes determinen aquellos elementos básicos que permiten obtener diferentes perspectivas en un paisaje.
- En esta sección, es importante que comprendan que el tipo de proyección es central o cónica, pues todas las líneas proyectantes pasan por un punto.
- En la actividad del cubo, se propone construirlo en perspectiva, usando instrumentos manuales. Es importante que comparen sus resultados para que puedan conjeturar respecto de las modificaciones que se puede aplicar a la construcción, respondiendo las preguntas.
- Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Resuelven problemas que involucran proyecciones, puntos de fuga y elevaciones.
  - Diseñan propuestas que permitan modelar problemas propios del arte, la arquitectura, el diseño o la construcción.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Prisma en perspectiva  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/jsMpYe8h>

## Actividad 4: Diseñar y construir un objeto 3D

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes resuelvan problemas relacionados con el diseño y la construcción de objetos (en este caso, muebles), aplicando diferentes estrategias y conceptos como vistas del objeto, cálculo del área y volumen, y que identifiquen las diferentes etapas de diseño y construcción del objeto.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 3.** Resolver problemas que involucren relaciones entre figuras 3D y 2D en las que intervengan vistas, cortes, proyecciones en el plano o la inscripción de figuras 3D en otras figuras tridimensionales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de tareas colaborativas y en función el logro de metas comunes.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

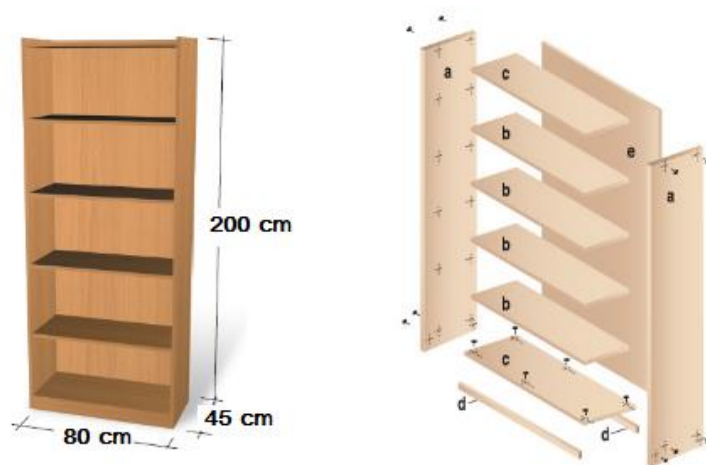
### DISEÑO DE UNA REPISA

Una de las características principales de un mueble es que es portátil; puede moverse de un lugar a otro, permitiendo mayor utilidad y comodidad.

En el área de diseño, se planifica y ejecuta la producción de diferentes prototipos de muebles; con ayuda de la tecnología y una variedad de materiales, se puede personalizar y crear nuestros propios muebles.

Un tipo de mueble es el de caja. Sus piezas conforman una caja, generalmente de forma recta, incluyendo armarios y sus derivaciones. Para diseñarlo, es clave determinar su función, dimensiones, el despiece para determinar cada una de las partes y el armado del mueble.





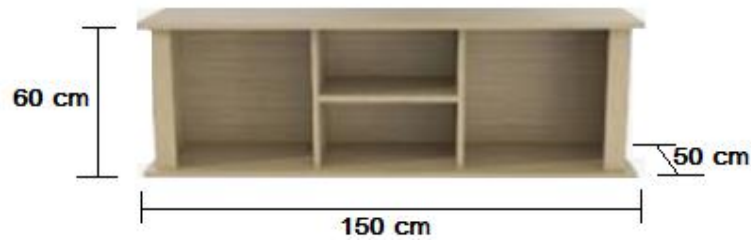
1. Supongan que disponen de un espacio, en la habitación, de 2 m de largo y 1 m de ancho para ubicar un mueble tipo repisa y respondan las siguientes preguntas, que los orientarán para diseñarla.
  - a. Organicen los elementos que guardarían en la repisa en la siguiente tabla:

Objeto					
Largo					
Alto					
Ancho					

- b. Expliquen qué medidas deben considerar para dimensionar las repisas.
- c. Diseñen el mueble según los objetos que ubicarían en él y dibujen las tres vistas del mueble en una cuadrícula, con las dimensiones correspondientes (largo, alto y ancho).
- d. Describan el dibujo desde su vista frontal, lateral derecha e izquierda.
- e. ¿Cuántos centímetros cuadrados de área ocupará el mueble en la habitación?
- f. En otra cuadrícula, dibujen cada una de las piezas que conforman el mueble. Especifiquen las dimensiones de cada una, considerando que usarán madera de 15 mm de espesor.
- g. ¿Por qué es importante especificar las medidas de cada pieza?
- h. Expliquen cuál es el aporte de la geometría en el diseño de un mueble.

## PIEZAS DE UN MUEBLE

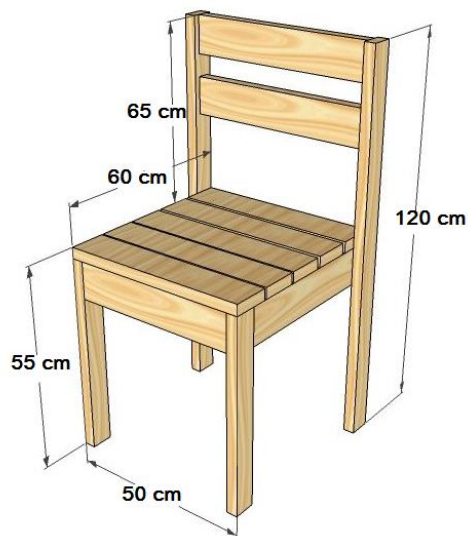
Observen la siguiente imagen:



- En una cuadrícula, dibujen las piezas que lo conforman, determinando la medida de cada pieza, y considerando que se usará melamina de 16 mm de espesor.
- Nominen las piezas con letras mayúsculas y redacten las instrucciones para armar del mueble.
- Presenten las instrucciones a otro grupo de la clase y reciban retroalimentación al respecto. ¿Qué sugerencias les parecen pertinentes? ¿Cómo mejorarían las instrucciones?
- Averigüen sobre los tornillos y clavos para muebles, ¿será necesario incluir su tipo y tamaño en las instrucciones?

## DIBUJAR LAS VISTAS DE UNA SILLA

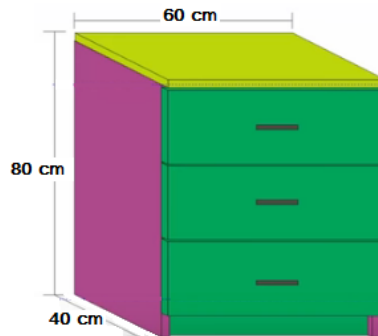
En una cuadrícula, dibuja las vistas de la siguiente silla e indica las medidas correspondientes. Considera la vista frontal, la lateral derecha o izquierda y la parte de atrás.



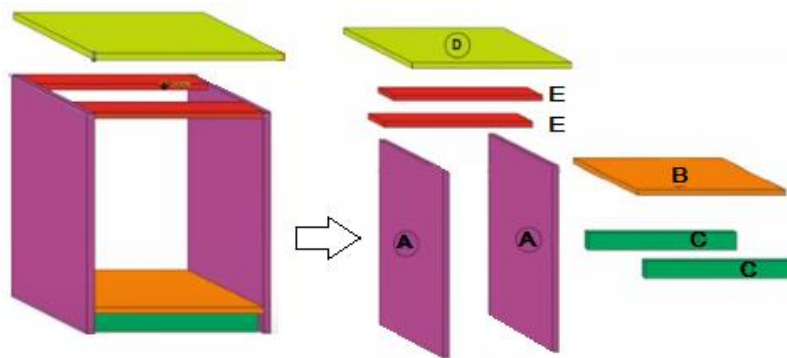
- Describe diferencias y similitudes entre los dibujos de las diferentes vistas.
- Si tuvieras las piezas y tienes que armar la silla, ¿cuáles serían las instrucciones?
- Elabora un manual de instrucciones con dibujos y medidas para armar la silla, y preséntalas a la clase.
- Si es posible y cuentas con los materiales, elabora tu propio diseño de silla y constrúyelo a escala. Comienza con el dibujo de las diferentes vistas e incluye un manual de instrucciones.

### DISEÑO DE UNA CAJONERA

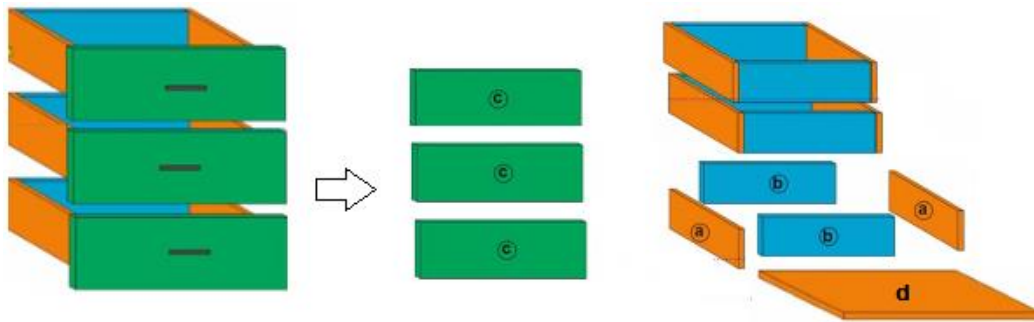
Se quiere fabricar el siguiente mueble con 3 cajoneras:



- a. Las siguientes imágenes presentan las piezas que conforman el mueble. Completen la tabla con las medidas de cada una, considerando que se fabricará con una melamina de 16 mm de espesor.



Descripción	Piezas			
	rótulo	cantidad	largo	ancho
Superior	D	1		
	E	2		
Base	B			
	C			
Lateral	A			

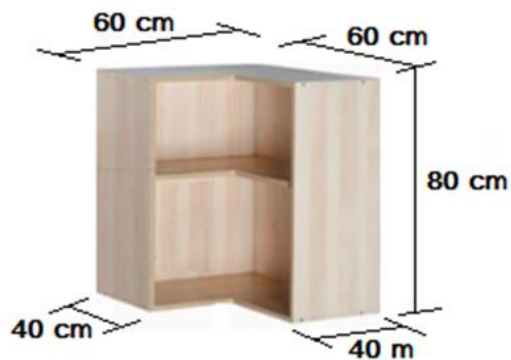


Descripción	Piezas			
	rótulo	cantidad	largo	ancho
Laterales	a			
	b			
Base	d			
Frontal	c			

- ¿qué estrategias puedes encontrar para ensamblar el mueble?
- ¿Por qué es relevante emplear un programa en esta situación?
- ¿Podría hacerse manualmente?
- ¿Cuáles son las ventajas o desventajas del programa Sketchup?

### CONSTRUCCIÓN DE UN MUEBLE

Marco es carpintero y quiere hacer un mueble esquinero. Necesita saber qué cantidad de madera debe comprar, si las dimensiones del mueble son las que muestra la siguiente imagen. Realiza el despiece del mueble y ordena los datos en una tabla.



## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. En la primera actividad, es importante guiar la reflexión y el trabajo para que valoren el aporte de la geometría en los diferentes campos del diseño; en este caso, el de un mueble.
2. La actividad de la repisa busca que identifiquen las etapas de diseño y construcción. Es importante que el profesor guíe la reflexión de acuerdo con el contexto descrito para que los jóvenes relacionen el diseño con la necesidad de cumplir con un objetivo (dado por la función y el uso del mueble) y decidan qué material se utilizará, sus dimensiones y las de sus partes, aplicando elementos de geometría.
3. En la actividad de la cajonera, tienen que determinar las dimensiones de sus piezas y realizar el ensamblado con ayuda de un programa computacional. Podrán trabajar en grupos y compartir estrategias.
4. Es importante que, al calcular cada parte, consideren el espesor de la melamina para que las piezas calcen sin problemas al ensamblar el mueble.
5. Esta actividad es una oportunidad para que elaboren muebles concretos; pueden elegir diferentes tamaños a escala y diversos materiales. Tienen que apreciar que las medidas deben ser precisas para que las piezas encajen y el mueble sea como se imaginó. Ofrece una ocasión adecuada para que elaboren las instrucciones de ensamblado y comiencen un proyecto personal o grupal.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Resuelven problemas que involucran proyecciones, puntos de fuga y elevaciones.
  - Diseñan propuestas que permiten modelar problemas propios del arte, la arquitectura, el diseño o la construcción.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Sketchup gratuito para descargar  
<https://www.sketchup.com/es/plans-and-pricing/sketchup-free>

## Actividad de Evaluación

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 3.** Resolver problemas que involucren relaciones entre figuras 3D y 2D en las que intervengan vistas, cortes, proyecciones en el plano o la inscripción de figuras 3D en otras figuras tridimensionales.

**OA 5.** Diseñar propuestas y resolver problemas relacionados con perspectiva, proyección paralela y central, puntos de fuga y elevaciones, tanto en arte como en arquitectura, diseño o construcción, aplicando conceptos y procedimientos de la geometría 3D.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

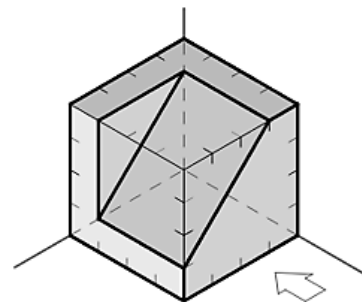
### Indicadores de evaluación

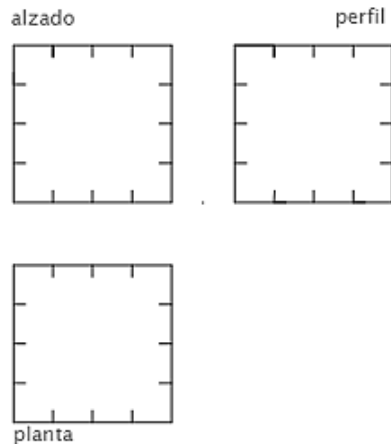
- Representan objetos 3D, utilizando diferentes vistas o sistemas de representación.
- Leen e interpretan información de formas 3D representadas en diferentes vistas o sistemas de representación.
- Resuelven problemas que implican interpretar vistas, cortes, perspectivas y proyecciones.
- Resuelven problemas que involucran proyecciones, puntos de fuga y elevaciones.
- Diseñan propuestas que permiten modelar problemas propios del arte, la arquitectura, el diseño o la construcción.

**Duración:** 6 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 3, cada una por sí misma o en conjunto. Conviene que trabajen algunas en equipo para que discutan y propongan estrategias para llegar a la o las soluciones posibles.

1. Se ha diseñado la siguiente pieza de acero de 4 cm de alto, ancho y profundidad.
  - a. Explica cómo determinas las vistas de alzado, perfil y planta de la pieza.
  - b. Dibuja las vistas de alzado, perfil y planta de la pieza.

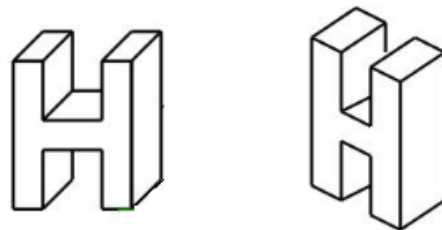




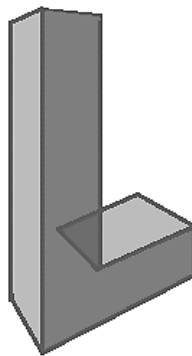
- c. Define cada una de las vistas.
- d. ¿Cuánto mide el volumen de la pieza?
- e. Argumenta sobre la veracidad o falsedad de la siguiente conjetura: “Si las dimensiones de la pieza aumentan al doble, puede que el volumen de la pieza aumente al doble”.

2. Observa la siguiente imagen.

- a. Explica: ¿cómo han cambiado las líneas horizontales?
- b. Explica: ¿cómo han cambiado las líneas verticales?
- c. Explica: ¿cómo han cambiado las líneas diagonales?

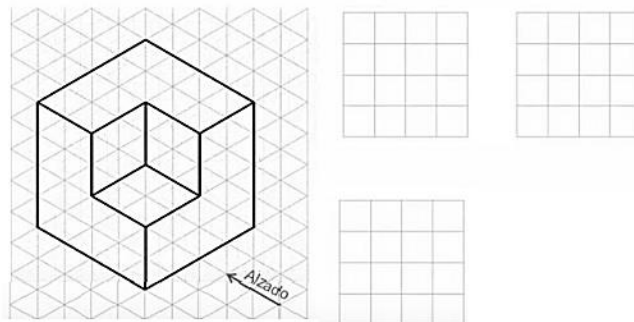
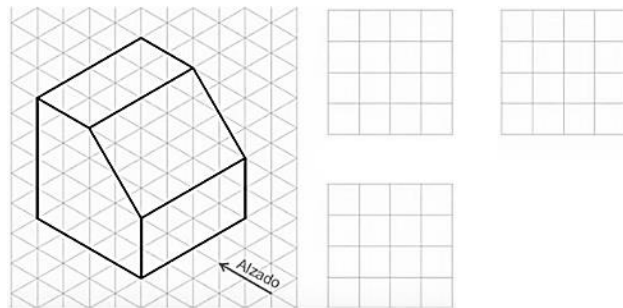


3. Observa la siguiente imagen.

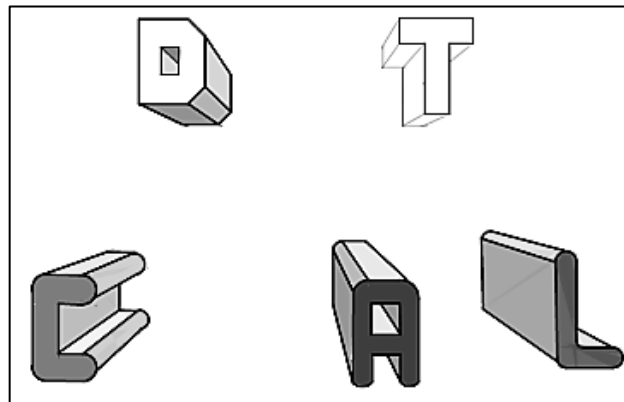


- a. Dibuja la línea de tierra (LT) y la del horizonte (LH).
- b. Explica el procedimiento para establecer los puntos de fuga.
- c. Determina los puntos de fuga de la figura.
- d. Cambia de posición los puntos de fuga y explica cómo varían las líneas oblicuas y verticales de la figura.

4. Observa las siguientes piezas y dibuja las vistas de alzado, perfil y planta de cada una.



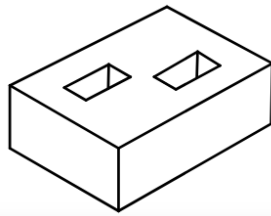
- Explica: ¿cómo determinas el volumen de cada una de las piezas?
  - Calcula el volumen de cada pieza.
5. Observa la siguiente imagen y responde las preguntas:



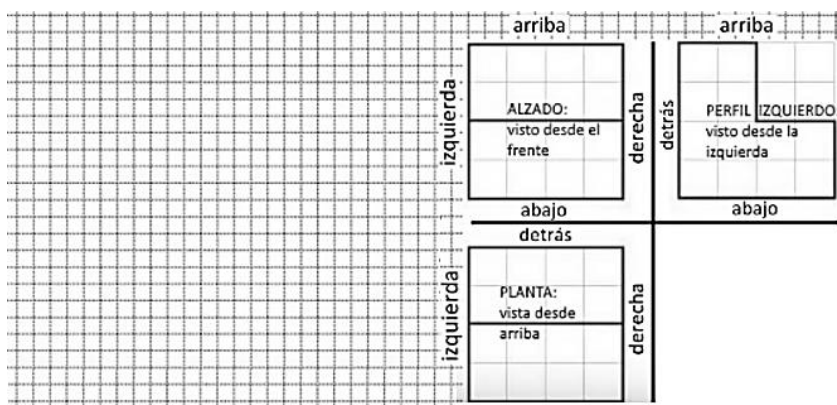
- Dibuja las líneas proyectantes para determinar los puntos de fuga.
- Explica: ¿cómo puedes determinar la línea de tierra?
- Explica: ¿cómo puedes determinar la línea del horizonte?



6. Observa la siguiente imagen de una pieza:



- Comenta con un compañero cuál sería el plano de corte más conveniente, que permitirá mayor claridad en la representación plana de la pieza.
  - Representen el corte de la pieza, según el plano de corte definido en el ejercicio anterior.
  - Dibujen la sección de corte de la pieza.
7. La siguiente imagen muestra las vistas de un sólido. Considerando los datos, represéntalo en una cuadrícula.



- Al comparar las representaciones con uno de tus compañeros, determinen qué escala uso cada uno.
  - ¿Cuántas vistas se necesita para determinar el sólido?
  - Usen solo una escala y dibujen las diferentes vistas.
8. Tomando como base el siguiente tipo de letra, diseñen un cartel.

# MATEMÁTICA

- Determinen si lo harán el cartel con un punto de fuga o dos.
- Dedican la ubicación de los elementos básicos; por ejemplo: distancia entre las LH y LT, ubicación del punto de fuga, dimensiones de las letras.

**PAUTA DE EVALUACIÓN**

Criterios de evaluación	Niveles de logros		
	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Representan objetos 3D, utilizando diferentes vistas o sistemas de representación.			
Leen e interpretan información de formas 3D representadas en diferentes vistas o sistemas de representación.			
Resuelven problemas que implican interpretar vistas, cortes, perspectivas y proyecciones.			
Resuelven problemas que involucran proyecciones, puntos de fuga y elevaciones.			
Diseñan propuestas que permiten modelar problemas propios del arte, la arquitectura, el diseño o la construcción.			

## Proyecto Interdisciplinario

### Manual de orientación

---

#### ¿Qué es el Aprendizaje Basado en Proyectos?

El Aprendizaje Basado en Proyectos se define como una propuesta de enseñanza que se organiza en torno a un problema o necesidad que se puede resolver, aplicando diferentes perspectivas y áreas del conocimiento. Para encontrar la solución, los estudiantes movilizarán conocimientos, habilidades y actitudes durante todo el proceso hasta llegar a una solución que se expresa en un producto. Los proyectos surgen desde sus propias inquietudes e intereses, potenciando así su motivación por aprender y su compromiso frente al propio aprendizaje.

#### ¿Por qué fomenta el trabajo interdisciplinario?

La complejidad de un problema real o necesidad es la razón que justifica la participación y conexión de distintos saberes y disciplinas. Por ejemplo, los proyectos STEM se desarrollan sobre problemas o necesidades que vinculan ciencia, tecnología, matemática e ingeniería para su solución.

#### ¿Cómo se relaciona con las Habilidades para el siglo XXI?

La metodología de proyecto permite que los estudiantes potencien estas habilidades y actitudes, ya que, por ejemplo, su procedimiento los organiza para que busquen juntos una solución, los desafía para que flexiblemente encuentren una respuesta nueva al problema y para que reflexionen con otros desde diferentes perspectivas, generando así el trabajo colaborativo, la comunicación y el pensamiento crítico y creativo.

#### ¿Cuáles son los elementos del Aprendizaje Basado en Proyectos?

##### **Pregunta o problema central**

Los problemas que se aborda en un proyecto se vinculan con situaciones reales y significativas para los estudiantes. Se relacionan con sus inquietudes e intereses y los motivan a explorar y participar activamente en la búsqueda responsable de una solución.

##### **Indagación sostenida**

Cuando se enfrentan a un problema desafiante, comienza el proceso de búsqueda para construir soluciones. Durante este proceso, los alumnos hacen nuevas preguntas, utilizan recursos y profundizan los conocimientos.

##### **Autenticidad**

Los proyectos tienen un contexto auténtico. Por ejemplo: los estudiantes resuelven problemas que enfrentan las personas fuera de la escuela, pero también pueden centrarse en problemas auténticos dentro de ella. Los proyectos pueden tener un impacto real en los demás, como cuando los alumnos atienden una necesidad en su escuela o comunidad (por ejemplo: diseñar y construir un huerto escolar,

mejorar un parque comunitario, ayudar a los inmigrantes locales); también pueden crear algo que otras personas usarán o experimentarán. Un proyecto puede tener autenticidad personal si refleja las preocupaciones, los intereses, las culturas, las identidades y los problemas de los estudiantes en sus vidas.

### **Voz y elección del estudiante**

Los alumnos deben sentir que pueden participar activamente, tomar decisiones, expresar sus puntos de vista, proponer soluciones durante el trabajo en equipo y expresarse por medio de los productos que crean. Participan activamente en un proyecto, desde el momento en que identifican el problema hasta que divulgan el producto; así fortalecen su compromiso y motivación con el propio aprendizaje.

### **Metacognición**

A lo largo de un proyecto los estudiantes –junto con el docente– deben reflexionar sobre lo que están aprendiendo, cómo están aprendiendo y por qué están aprendiendo. La reflexión puede ocurrir de manera informal, como parte de la cultura y el diálogo en el aula, pero también debe ser una parte explícita de los diarios del proyecto, la evaluación formativa programada, las discusiones en los puntos de control del proyecto y las presentaciones públicas de su trabajo. La reflexión sobre el proyecto en sí, cómo se diseñó e implementó, los ayuda a decidir cómo podrían abordar su próximo proyecto y a mejorar la forma de aplicar esta metodología.

### **Crítica y revisión**

Los estudiantes deben estar abiertos a dar y recibir comentarios constructivos acerca del trabajo propio y el de sus compañeros, lo que permite mejorar los procesos y productos del proyecto. Idealmente, tiene que hacerlo según protocolos formales y con el apoyo de rúbricas. Los invitados o expertos externos también pueden ayudar, brindando un punto de vista auténtico y real. La crítica y revisión del trabajo propio permite a los alumnos evaluar los resultados de su aprendizaje, fortaleciendo la evaluación formativa.

### **Producto público**

A diferencia de otras metodologías, en el Aprendizaje Basado en Proyectos la respuesta o solución a la pregunta o problema se expresa en un "producto", que puede ser un artefacto tangible, multimedial o digital, una presentación sobre la solución a un problema, un desempeño o evento, entre otras opciones. Al finalizar el proyecto, los estudiantes tienen que poder presentarlo públicamente; eso aumenta su motivación, ya que no se reduce a un intercambio privado entre profesor y alumno. Esto tiene un impacto en el aula y en la cultura escolar, pues ayuda a crear una "comunidad de aprendizaje", en la cual los estudiantes y los maestros discuten lo que se está aprendiendo, cómo se aprende, cuáles son los estándares de desempeño aceptables y cómo se puede mejorar el desempeño de los alumnos. Finalmente, hacer que el trabajo de los alumnos sea público es una forma efectiva de comunicarse con los pares y los miembros de la comunidad.

### ¿Qué debo considerar antes de la ejecución de un proyecto?

- Incorporar en la planificación anual de la asignatura una o más experiencias de proyectos, tomando en cuenta el tiempo semanal de la misma.
- Si la asignatura es de 2 horas a la semana, se recomienda incorporar un proyecto acotado o abordar toda una unidad de aprendizaje mediante esta metodología.
- Si la asignatura es de 6 horas semanales, se recomienda destinar un tiempo fijo a la semana (por ejemplo, 2 horas) para el proyecto.
- La planificación anual también debe incorporar la exhibición pública de los proyectos. Se recomienda que sea una instancia en que se invite a los padres, familias, expertos y otros miembros de la comunidad (se sugiere solicitar a la dirección del establecimiento que reserve un día para llevar a cabo la actividad).
- Identificar en los Objetivos de Aprendizaje, tópicos, necesidades o problemas que se pueda abordar interdisciplinariamente con dos o más asignaturas.
- Si el proyecto involucra a dos o más asignaturas, los profesores deben planificarlo juntos y solicitar un tiempo adecuado para ello a su jefe técnico o al director.
- Una vez hecha esta planificación e iniciado el año escolar, se debe explicar a los estudiantes en qué consiste esta metodología, exponerles los tópicos que se identificó en las Bases Curriculares y pedirles que, a partir de ello, propongan problemas o preguntas que se puede resolver o responder mediante un proyecto.
- El Aprendizaje Basado en Proyectos requiere de un trabajo grupal y colaborativo. Cada integrante del grupo debe asumir un rol específico, el cual puede ir rotando durante la ejecución del proyecto.

### ¿Cómo se organiza y ejecuta el proyecto?

Para organizar el proyecto, se presenta una ficha con diferentes componentes que ayudarán a ejecutarlo. A continuación, se explica cada uno de esos componentes.

#### **Resumen del proyecto**

Síntesis del tema general, el propósito y el resultado esperado del proyecto.

#### **Nombre del proyecto**

Se recomienda incluir un subtítulo que evidencie el tema o el contenido que se trabaja en el proyecto.

#### **Problema central**

En esta sección, se expone un párrafo de la pregunta o problema que se quiere resolver por medio del proyecto. Se recomienda explicar cuál es el tema que se va a resolver y por qué el proyecto puede hacerlo o desarrollar reflexiones profundas en los alumnos.

#### **Propósito**

Se explica el objetivo general y específico del proyecto.

### **Objetivos de Aprendizaje de Habilidades y Conocimientos**

En esta sección, se explica cuáles son los Objetivos de Aprendizaje de la asignatura que se desarrollará en el proyecto. Se espera que sean interdisciplinarios, por lo que se recomienda incorporar los OA de las otras asignaturas involucradas.

### **Tipo de Proyecto Interdisciplinario**

Es importante aclarar qué aspectos de las distintas disciplinas se aplicará en el proyecto. Esta sección busca que el docente exponga y explique tales relaciones de manera que sea más fácil guiar el trabajo interdisciplinario. Para esto, conviene que se coordine con los profesores de las otras áreas disciplinares.

### **Producto**

Todo proyecto debe tener como resultado un producto; es decir, algún objeto, aparato, informe, estudio, ensayo, disertación oral, escrita, visual, audiovisual o multivisual para que los estudiantes divulguen el trabajo realizado.

### **Habilidades y actitudes para el siglo XXI**

Es importante que el docente resalte que esta metodología pretende que los alumnos desarrollen habilidades y actitudes del siglo XXI, que son transversales a todas las áreas del currículum. Esto permite que profesores y alumnos sean conscientes de que ellas van más allá de los conocimientos y habilidades disciplinares.

### **Recursos**

Se tiene que describir los componentes, insumos de trabajo, bibliografía o elementos fundamentales para el proyecto.

### **Etapas**

Hay que planificar el proyecto según fases de trabajo, considerando el tiempo destinado al mismo en la planificación anual.

### **Cronograma semanal**

Es importante planificar el avance del proyecto clase a clase; en una sola se puede desarrollar más de una etapa, o una etapa puede durar más de una clase. Lo importante es que la planificación sea clara y ordenada para que profesor y alumnos trabajen de la manera más regular posible, considerando los avances u obstáculos que puedan encontrar en el desarrollo del proyecto.

### **Evaluación formativa y sumativa**

En esta sección, el docente tiene que especificar con qué criterios se evaluará el proyecto y qué instrumentos se aplicará, tanto en la dimensión formativa como en la sumativa. Es importante recordar que la retroalimentación es un componente esencial del proyecto, por lo que profesor debe señalar cómo llevará a cabo dicho proceso.

### **Difusión final**

Dependiendo del objetivo del proyecto, se sugiere que cuando lo terminen, los alumnos dediquen algún tiempo para difundirlo a la comunidad escolar.

## Proyecto: Creando espacios públicos para la comunidad

### Resumen del Proyecto

El objetivo de este proyecto es la creación de un espacio público destinado a satisfacer necesidades relacionadas con el desarrollo cultural y físico de la comunidad.

Para iniciar, los estudiantes identifican problemas referidos al bienestar en su comunidad, por medio de investigaciones en diversas fuentes, además de entrevistas y encuestas, entre otros, para obtener información acerca de las necesidades culturales y de salud física de la comunidad. Luego investigan acerca de espacios públicos similares, generan ideas y prototipos de alternativas o soluciones para abordar el problema, definen el o los objetivos, las acciones y estrategias, los tiempos y los recursos materiales y humanos necesarios; asimismo, identifican los roles de cada alumno y las habilidades y conocimientos que se requiere para llevarlo a cabo. Evalúan formativamente las propuestas y realizan los ajustes necesarios.

Desarrollan sus proyectos basados en sus planificaciones, los presentan para ser evaluados. Por último, los difunden en la comunidad escolar o en otra más amplia por medio de una exposición o feria.

<b>Nombre del Proyecto</b>	
<b>Creando espacios públicos para la comunidad</b>	
<b>Problema central</b>	
La comunidad no cuenta con suficientes espacios públicos destinados al desarrollo cultural y de actividades físicas de diferente índole.	
<b>Propósito</b>	
Crear un proyecto de un espacio público para desarrollar actividades culturales y físicas de diversa índole.	
<b>Objetivos de Aprendizaje</b> <b>Geometría 3D</b> <b>OA 5.</b> Diseñar propuestas y resolver problemas relacionados con perspectiva, proyección paralela y central, puntos de fuga y elevaciones, tanto en arte como en arquitectura, diseño o construcción, aplicando conceptos y procedimientos de la geometría 3D. <b>OA a.</b> Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. <b>OA g.</b> Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.  <b>Diseño y Arquitectura</b> <b>OA 2.</b> Crear proyectos de diseño y arquitectura que respondan a necesidades de las personas y el contexto, basados en la investigación con materiales, herramientas	<b>Preguntas</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué espacio –dentro del establecimiento educacional o en el entorno– podríamos que intervenir para mejorar la vida comunitaria en los ámbitos cultural y físico?</li> <li>• ¿Qué necesitan los miembros de la comunidad en relación con el espacio para actividades culturales y físicas?</li> <li>• ¿Podemos ayudar a la comunidad, creando un espacio público destinado a esos efectos?</li> <li>• ¿Cómo han solucionado otros este problema?</li> <li>• ¿Cómo elaboramos un espacio público para el desarrollo cultural y físico de la comunidad?</li> </ul>

y procedimientos, y de referentes artísticos nacionales e internacionales.

**OA 3.** Diseñar y gestionar presentaciones a públicos específicos para comunicar propósitos, aspectos del proceso y resultados de proyectos de diseño y arquitectura, empleando materiales, herramientas y tecnologías emergentes y tradicionales.

#### **Educación Ciudadana**

##### **OA de Habilidades**

##### **Comunicación**

- **g.** Comunicar explicaciones, conclusiones u opiniones fundamentadas haciendo uso de lenguaje, las normas y convenciones de la disciplina.

##### **Objetivos de conocimiento**

**OA 8.** Participar en distintas instancias escolares de ejercicio democrático, reconociendo la necesidad de organizar socialmente la vida en comunidad, a fin de fortalecer una sana convivencia que resguarde las libertades fundamentales y el bien común.

#### **Educación Física y Salud**

**OA 4.** Promover el bienestar, el autocuidado, la vida activa y la alimentación saludable en su comunidad, valorando la diversidad de las personas a través de la aplicación de programas y proyectos deportivos, recreativos y socioculturales.

#### **Tipo de Proyecto**

Interdisciplinario

- Arquitectura y Diseño
- Educación Ciudadana
- Educación Física y Salud
- Geometría 3D

#### **Producto/s**

- Resultados de la consulta a la comunidad sobre necesidades y características que debería tener un espacio público que fomente la cultura y el desarrollo físico de sus integrantes.
- Fundamentación del diseño del espacio público a partir de las necesidades comunitarias, según el territorio, los recursos disponibles y otros aspectos a considerar para mejorar la vida de esa comunidad.
- Maqueta y plano del espacio público propuesto.
- Representación a escala real de algunos de los objetos de diseño destinados a la actividad física y /o cultural.

#### **Habilidades y actitudes para el Siglo XXI**

- Colaboración.
- Responsabilidad personal y social.
- Creatividad e innovación



**Recursos web:****Plataforma arquitectura**

- <https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/search/projects/categories/espacio-publico>

**Fundación Mi Parque**

- <https://www.miparque.cl/>

**World Urban Parks**

- <https://wup.imiscloud.com/Default.aspx>

**Etapas**

- Fase 1: Identificación del problema (Diseño y Arquitectura, Educación Ciudadana y Educación Física y Salud)
- Fase 2: Diseño de propuesta de proyecto y planificación
- Fase 3: Retroalimentación y ajustes
- Fase 4: Desarrollo y ejecución de proyecto
- Fase 5: Presentación resultados del proyecto
- Fase 6: Evaluación de resultados
- Fase 7: Difusión de los resultados del proyecto

**Cronograma semanal**

- Semana 1: (Fase 1)
- Semana 2: (Fases 2 y 3)
- Semana 3: (Fase 4)
- Semana 4: (Fase 4)
- Semana 5: (Fases 5, 6 y 7)

**Evaluación Formativa**

Los jóvenes elaboran una bitácora para anotar las actividades desarrolladas durante el proyecto. El registro de cada fase constituye evidencia para que el profesor y los pares hagan evaluaciones formativas. Además, tiene que haber pautas de evaluación basadas en escalas de apreciación y/o rúbricas que permitan que el docente y los alumnos constaten avances, fortalezas y elementos a mejorar del proyecto.

**Evaluación Sumativa**

El profesor evaluará sumativamente los resultados finales y cada fase del proyecto. Para esto último, podrá aplicar las pautas de la evaluación formativa y otras para evaluar los productos finales. A su vez, los jóvenes autoevaluarán su trabajo y evaluarán el de otros grupos.

**Difusión Final**

El resultado de los proyectos se presentará a la comunidad educativa y, de ser factible, a una comunidad más amplia. Para esto, se organizará una feria donde cada grupo tendrá un espacio y un tiempo para mostrar sus proyectos. Cada grupo se hará cargo de su espacio, donde instalarán sus maquetas y planos del espacio público propuesto, uno de los objetos destinados a la actividad física o cultural e infografías con la fundamentación del proyecto.

## Bibliografía

- Bermejo, M. (1991). *Geometría descriptiva aplicada*. México: Alfaomega.
- Bertoline, G., Wiebe, E., Miller, C. y Mohler, J. (1999). *Dibujo en ingeniería y comunicación gráfica*. México: McGraw Hill.
- Fadel, Ch., Bialik, M. y Trilling, B. (2016). *Educación en cuatro dimensiones: las competencias que los estudiantes necesitan para su realización*. Santiago: Graphika.
- Fraleigh, J. (1997). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Fondo Editorial Interamericano.
- Griffin, P. (2014). *Assessment for Teaching*. Melbourne: Cambridge University Press.
- Hawk, M. C. (1991). *Geometría descriptiva*. México: McGraw Hill.
- Herrera, B., y Montero López, F. (2002). *Geometría analítica, descriptiva y proyectiva para arquitectos y diseñadores*. México: Pearson Educación.
- Holliday-Darr, K. (2000). *Geometría descriptiva*. México: Thomson International.
- Larmer, J., Mergendoller, J., y Boss, S. (2015). *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*. Alexandria, VA.: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Larson, R. y Hostetler, R. (1995). *Cálculo y Geometría Analítica*. Bogotá: McGraw-Hill.
- Lehmann, C. H. (1964). *Álgebra*. México: Limusa.
- Leighton, W. B. (1987). *Geometría descriptiva*. Barcelona: Reverté.
- Leithold, L. (1998). *El Cálculo con Geometría Analítica*. (7ª. Ed.). México: Harla.
- Moss, C. & Brookhart, S. (2009). *Advancing formative assessment in every classroom: a guide for instructional leaders*. Alexandria, VA.: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Purcell, E. J, y Varberg, D. (1993). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Prentice Hall Hispanoamericana.
- Rosenmann, R. (1981). *Geometría descriptiva diédrica con aplicación a geología*. Santiago de Chile: Instituto de Investigaciones Geológicas.
- Simmons, G. (2002). *Cálculo y Geometría Analítica*. (2ª. Ed.). Bogotá: McGraw-Hill.
- Stein, S.; y Barcellos, A. (1995). *Cálculo y geometría analítica*. Bogotá: McGraw-Hill.
- Stewart, J. (1999). *Cálculo: trascendentes tempranas*. México: Thomson International.
- Stewart, J. (2006). *Cálculo: conceptos y contextos*. México: Thomson International.

- Stewart, J. Redlin, L. Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo*. Santa Fe, México: Cengage Learning Editores.
- Swokowski, E. (1987). *Introducción al Cálculo con Geometría Analítica*. México: Iberoamericana.
- Vygotsky, L. (1978). Interaction between Learning and Development. En Gauvain & Cole (Eds.) *Readings on the Development of Children*. Ney York: Scientific American Books, pp.34 – 40.
- Wiggins, G. & McTighe, J. (2005). *Understanding by design*. Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.

## Anexos

### Rúbrica Para El Trabajo Colaborativo

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

Desempeño individual	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p><b>1</b></p> <p><b>Se hace responsable de sí mismo</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No demuestra preparación, información y disposición para trabajar en equipo.</li> <li>No usa las herramientas tecnológicas acordadas con el equipo para comunicar y gestionar las tareas de proyecto.</li> <li>No hace la mayoría de las tareas del proyecto o no las completa a tiempo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>En general demuestra preparación, información y disposición para trabajar con el equipo.</li> <li>Usa las herramientas tecnológicas acordadas con el equipo para comunicar y gestionar las tareas del proyecto, pero de manera consistente.</li> <li>Realiza algunas tareas pero necesita que se le recuerde al respecto.</li> <li>Completa la mayoría de las tareas a tiempo.</li> <li>A veces usa retroalimentación de los otros para mejorar su trabajo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Demuestra preparación, información y disposición para trabajar; estando bien informado acerca del tema del proyecto y cita y usa la evidencia para investigar y reflexionar acerca de ideas con el equipo.</li> <li>Usa sistemáticamente las herramientas tecnológicas acordadas con el equipo para comunicar y gestionar las tareas del proyecto.</li> <li>Realiza las tareas sin que se le tenga que recordar al respecto.</li> <li>Completa la totalidad de las tareas a tiempo.</li> <li>Usa la retroalimentación de los otros para mejorar su trabajo.</li> </ul>
<p><b>2</b></p> <p><b>Ayuda al equipo</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No ayuda al equipo a resolver problemas; puede generar problemas.</li> <li>No hace preguntas de sondeo ni expresa ideas o elabora en respuesta a preguntas y discusiones.</li> <li>No da retroalimentación útil a los otros.</li> <li>No ofrece ayudar a los otros si estos lo necesitan.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Coopera con el equipo, pero puede no ser activo en la ayuda para solucionar problemas.</li> <li>A veces expresa sus ideas claramente, hace preguntas de sondeo y elabora en respuesta a preguntas y discusiones.</li> <li>Da retroalimentación a otros, pero esto no es siempre útil.</li> <li>A veces ofrece ayudar a los otros si estos lo necesitan.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ayuda al equipo a resolver problemas y manejar los conflictos.</li> <li>Ayuda a la generación de discusiones efectivas al expresar sus ideas claramente, hacer preguntas de sondeo, asegurarse que todos sean escuchados y al responder de manera reflexiva ante nueva información y perspectivas.</li> <li>Da retroalimentación efectiva (específica, factible y apoyadora) a los otros para que puedan mejorar su trabajo.</li> <li>Ofrece ayuda a los otros si es que los necesitan.</li> </ul>
<p><b>3</b></p> <p><b>Respeto a otros</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Es irrespetuoso o poco amable con sus compañeros de equipo (puede interrumpir, ignorar las ideas de los otros o herir sentimientos)</li> <li>No reconoce o respeta otras posturas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>En general, es educado y amable con sus compañeros de equipo.</li> <li>En general, reconoce y respeta las posturas de los otros y al estar en desacuerdo, lo expresa de forma diplomática.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Es educado y amable con sus compañeros de equipo.</li> <li>Reconoce y respeta las posturas de los otros y al estar en desacuerdo, lo expresa de forma diplomática.</li> </ul>

## Rúbrica para el Pensamiento Crítico

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

Oportunidad de pensamiento crítico en las fases del proyecto	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p><b>1</b></p> <p><b>Lanzamiento del proyecto.</b></p> <p><b>Analiza la pregunta clave e inicia la indagación.</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Solo ve los aspectos superficiales de la pregunta clave o solo un punto de vista de la misma.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica algunos aspectos centrales de la pregunta clave, pero puede no ver sus complejidades ni considerar variados puntos de vista.</li> <li>Realiza preguntas complementarias acerca del tema o acerca de lo que la audiencia o usuarios del producto quieren o necesitan, pero no indaga lo suficiente en ello.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Demuestra comprensión acerca de los aspectos centrales de la pregunta clave, identificando en detalle lo que se necesita saber para responderla y considerando varios posibles puntos de vista para responderla.</li> <li>Realiza preguntas complementarias que permiten enfocar o ampliar la indagación, si es que se necesita.</li> <li>Hace preguntas complementarias para lograr la comprensión acerca de lo que la audiencia o usuarios del producto quieren o necesitan.</li> </ul>
<p><b>2</b></p> <p><b>Construcción de conocimiento, comprensión y habilidades.</b></p> <p><b>Recopilar y evaluar información.</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Es incapaz de integrar la información para responder la pregunta clave; recopila muy poca o demasiada información y esta es irrelevante o viene de muy pocas fuentes.</li> <li>Acepta la información sin cuestionar su validez ni evaluar su calidad.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Intenta integrar la información para responder la pregunta clave; pero puede ser muy poca o demasiada información y/o viene de muy pocas fuentes o de algunas irrelevantes.</li> <li>Comprende que la calidad de la información debe ser considerada pero no aplica este criterio de manera rigurosa.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Integra suficiente información relevante para responder la pregunta clave. Esta información proviene de múltiples y variadas fuentes.</li> <li>Evalúa de manera rigurosa la calidad de la información (considera su utilidad, precisión y credibilidad; distingue los hechos de las opiniones; reconoce el sesgo).</li> </ul>

Oportunidad de pensamiento crítico en las fases del proyecto	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p style="text-align: center;"><b>3</b></p> <p><b>Desarrollo y revisión de ideas y productos.</b></p> <p><b>Uso de evidencia y sus normas de evaluación.</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Acepta argumentos para la obtención de posibles respuestas a la pregunta clave sin cuestionar si su razonamiento es válido.</li> <li>• Usa la evidencia sin considerar cuán sólida esta es.</li> <li>• Confía en "su instinto" para evaluar y revisar las ideas, prototipos de productos o soluciones a los problemas (no usa las normas de evaluación).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconoce la importancia y necesidad de un razonamiento válido y evidencia sólida, pero no los evalúa de forma cuidadosa al formular respuestas a la pregunta clave.</li> <li>• Evalúa y revisa ideas, prototipos de producto, soluciones a los problemas, basándose en normas incompletas o inválidas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Evalúa argumentos para la obtención de posibles respuestas a la pregunta clave considerando si es que el razonamiento es válido y la evidencia es relevante y suficiente.</li> <li>• Justifica la elección de los criterios usados para evaluar las ideas, prototipos de productos o soluciones a los problemas.</li> <li>• Revisa los borradores, diseños y soluciones inadecuadas y explica por qué no se ajustan a las normas.</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>4</b></p> <p><b>Presentación de productos y la respuesta a la pregunta clave.</b></p> <p><b>Justifica sus elecciones, considera alternativas y sus implicancias.</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elige un medio para presentar sin considerar las ventajas y desventajas de usar otros medios para presentar un tema o idea en particular.</li> <li>• No es capaz de dar razones válidas o evidencia adecuada para defender elecciones con el fin de responder la pregunta central o crear productos.</li> <li>• No considera ni respuestas alternativas, ni distintos diseños del producto o diferentes puntos de vista para responder a la pregunta clave.</li> <li>• No es capaz de explicar el nuevo conocimiento ganado a través de la realización del proyecto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Considera las ventajas y desventajas de usar diferentes medios para presentar un tema o idea en particular, pero no de forma rigurosa.</li> <li>• Explica opciones tomadas al responder la Pregunta clave o la creación de productos, pero algunas razones no son válidas o carecen de evidencia que las apoye.</li> <li>• Entiende que puede haber alternativas de respuestas a la pregunta de manejo o diseños para productos, pero no los considera cuidadosamente.</li> <li>• Puede explicar algunas cosas aprendidas en el proyecto, pero no está del todo claro acerca de nuevos conceptos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Evalúa las ventajas y desventajas de usar otros medios para presentar un tema o idea.</li> <li>• Justifica sus elecciones al responder la pregunta central o al crear productos dando razones válidas con evidencia que las respalde.</li> <li>• Reconoce las limitaciones de una sola respuesta a la pregunta central o al diseño del producto (cómo puede no ser completa, certera o perfecta) y considera perspectivas alternativas.</li> <li>• Puede explicar claramente los nuevos aprendizajes adquiridos en el proyecto y cómo estos pueden ser transferidos a otras situaciones o contextos.</li> </ul>

## Rúbrica de Pensamiento Creativo e Innovación

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

Oportunidad de creatividad e innovación en distintas fases del proyecto	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p><b>1</b></p> <p><b>Lanzamiento del proyecto.</b></p> <p><b>Definición del desafío creativo</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Puede solo "seguir instrucciones" sin comprender el propósito de la innovación o considerar las necesidades e intereses del público objetivo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprende el propósito de la innovación, pero no considera a cabalidad las necesidades e intereses del público objetivo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprende el propósito de la innovación (¿quién necesita esto? ¿por qué?)</li> <li>• Desarrolla perspicacia acerca de las necesidades e intereses del público objetivo.</li> </ul>
<p><b>2</b></p> <p><b>Construcción de conocimiento, comprensión y habilidades.</b></p> <p><b>Identifica fuentes de información</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa solo fuentes de información usuales (página web, libro, artículo).</li> <li>• No ofrece nuevas ideas durante las discusiones.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Encuentra una o dos fuentes de información que no son las usuales (página web, libro, artículo).</li> <li>• Ofrece nuevas ideas durante las discusiones, pero sus puntos de vista son poco variados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Encuentra maneras o lugares inusuales para obtener nueva información (adultos expertos, miembros de la comunidad, empresas, organizaciones, literatura), además de las fuentes usuales (página web, libro, artículo).</li> <li>• Promueve puntos de vista divergentes y creativos durante las discusiones.</li> </ul>
<p><b>3</b></p> <p><b>Desarrollo y revisión de ideas y productos.</b></p> <p><b>Generación y selección de ideas.</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permanece dentro de los parámetros ya existentes; no usa técnicas para la generación de ideas para el desarrollo de nuevas ideas para la creación de productos.</li> <li>• Selecciona una idea sin evaluar su calidad.</li> <li>• No formula nuevas preguntas ni elabora la idea seleccionada.</li> <li>• No considera ni usa la retroalimentación y la crítica para revisar el producto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Desarrolla algunas ideas originales para los productos, utilizando una o dos veces las técnicas de generación de ideas.</li> <li>• Evalúa las ideas antes de seleccionar una, pero no de manera rigurosa.</li> <li>• Formula una o dos preguntas nuevas, pero puede hacer solo pequeñas modificaciones a la idea seleccionada.</li> <li>• Demuestra algo de imaginación al dar forma a las ideas para la elaboración de un producto, pero permanece dentro de límites convencionales.</li> <li>• Considera y usa la retroalimentación y la crítica para revisar el producto, pero no busca esta retroalimentación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa técnicas para la generación de ideas para el desarrollo de nuevas ideas para la creación de productos.</li> <li>• Evalúa cuidadosamente la calidad de las ideas y selecciona la mejor para darle forma a un producto.</li> <li>• Formula preguntas nuevas y toma distintas perspectivas para elaborar y mejorar la idea seleccionada.</li> <li>• Usa el ingenio y la imaginación y se sale de los límites convencionales al dar forma a las ideas para la elaboración de un producto.</li> <li>• Busca y usa la retroalimentación y la crítica para revisar el producto y así cumplir de una mejor manera con las necesidades del público objetivo.</li> </ul>

Oportunidad de creatividad e innovación en distintas fases del proyecto	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p><b>4</b></p> <p><b>Presentación de productos y respuestas a las preguntas centrales.</b></p> <p><b>Presentación del trabajo a los usuarios o público objetivo.</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta ideas y productos de forma convencional (presentaciones ppt, cargadas de texto, recitación de notas, falta de elementos de interacción con la audiencia)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Añade algunos detalles que poseen atractivo visual a los medios utilizados en la presentación.</li> <li>• Intenta incluir elementos en la presentación que la harán más animada y atractiva.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Crea medios para una presentación atractiva visualmente, evitando las formas convencionales (presentaciones ppt cargadas de texto, recitación de notas, falta de elementos de interacción con la audiencia).</li> <li>• Incluye elementos en la presentación que son especialmente vivaces, llamativos o poderosos y acordes al público objetivo.</li> </ul>
<p><b>5</b></p> <p><b>Originalidad</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa modelos, ideas o direccionamientos existentes; no es original o único.</li> <li>• Sigue reglas y convenciones; usa materiales e ideas de maneras típicas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tiene algunas ideas novedosas o considera mejoras, pero algunas de estas ideas son predecibles o convencionales.</li> <li>• Puede tentativamente tratar de desmarcarse de las reglas y convenciones, o encontrar nuevos usos para materiales e ideas comunes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Es novedoso, único y sorprendente; muestra un toque personal.</li> <li>• Puede romper las reglas y convenciones de manera exitosa o usar materiales e ideas comunes de formas nuevas, inteligentes y sorprendidas.</li> </ul>
<p><b>6</b></p> <p><b>Valor</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No es útil o valioso para el público objetivo/usuario.</li> <li>• No funcionaría en el mundo real porque es poco práctico o inviable.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Es útil y valioso en cierta medida; puede no resolver ciertos aspectos del problema o ajustarse exactamente a la necesidad previamente identificada.</li> <li>• No queda claro si es que el producto sería práctico o viable.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El producto se percibe como útil y valioso, resuelve el problema ya definido o la necesidad previamente identificada.</li> <li>• Es práctico y viable.</li> </ul>
<p><b>7</b></p> <p><b>Estilo</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Es seguro, común y corriente y, de hecho, es un estilo convencional.</li> <li>• Contiene tres o más elementos que no son coherentes entre sí, dificultando su comprensión.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tiene algunos toques interesantes, pero carece de un estilo distintivo.</li> <li>• Tiene uno o dos elementos que pueden ser excesivos o no coherentes entre sí.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Está bien diseñado, es llamativo, tiene un estilo distintivo pero adecuado al propósito.</li> <li>• Combina diferentes elementos logrando un todo coherente.</li> </ul>

Nota: El término "producto" se usa en esta rúbrica como un término que abarca el resultado del proceso de innovación durante un Proyecto. Un producto puede ser un objeto construido, una propuesta, presentación, solución a un problema, servicio, sistema, obra artística o literaria, un invento, un evento, una mejora a un producto existente, etc.



## Rúbrica de Diseño del Proyecto

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

	No presenta las características del Proyecto efectivo	Necesita más desarrollo	Incluye características del proyecto efectivo
<p><b>1</b></p> <p><b>Metas de aprendizaje del estudiante: conocimiento esencial, comprensión y habilidades para alcanzar el éxito</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Las metas de aprendizaje del estudiante no son claras ni específicas: el proyecto no está enfocado en los estándares.</li> <li>El proyecto no abarca, evalúa o demuestra el desarrollo de habilidades para el éxito.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto se enfoca en los estándares derivados del conocimiento y de la comprensión, pero puede referirse a muy pocas o demasiadas metas o metas sin mucha importancia.</li> <li>Las habilidades para el éxito están presentes, pero pueden ser demasiadas para ser enseñadas y evaluadas de manera adecuada.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto se enfoca en la enseñanza de habilidades y conocimiento importante enfocado en los estudiantes. Estos conocimientos se ajustan a los estándares y representan conocimientos centrales de las asignaturas.</li> <li>Las habilidades para el éxito se abordan de manera explícita para ser enseñadas y evaluadas, como los son el pensamiento creativo, la colaboración, la creatividad y la gestión del proyecto.</li> </ul>
<p><b>2</b></p> <p><b>Problema o pregunta desafiante</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto no se enfoca en un problema o pregunta central (es más parecido a una unidad con varias tareas); o el problema o pregunta es muy fácil de resolver o de responder para que la existencia del proyecto se justifique.</li> <li>El problema o pregunta inicial no gira en torno a una pregunta que sea esencial para el proyecto o presenta graves fallas como, por ejemplo:                             <ul style="list-style-type: none"> <li>&gt;Tiene una sola y/o simple respuesta.</li> <li>&gt;No es motivante para los estudiantes (suena demasiado compleja o académica, como si viniera de un libro y, por ende, es atractiva solo para el profesor).</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto se enfoca en un problema o pregunta central, pero el nivel de desafío puede ser inapropiado para los estudiantes a quienes va dirigido.</li> <li>La pregunta inicial para el proyecto se relaciona con el mismo, pero no captura su problema o pregunta central (puede ser más como una temática más amplia).</li> <li>La pregunta inicial cumple con algunos de los criterios presentes en la columna de "incluye las características" pero carece de otros.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto se enfoca en un problema o pregunta central con un desafío apropiado.</li> <li>El proyecto se enmarca en una pregunta inicial que es:                             <ul style="list-style-type: none"> <li>&gt;Abierta: hay más de una respuesta correcta.</li> <li>&gt;Comprensible e inspiradora para los estudiantes.</li> <li>&gt;Alineada con las metas de aprendizaje. Para responder esta pregunta los estudiantes deberán obtener las habilidades, conocimiento y comprensión adecuados.</li> </ul> </li> </ul>
<p><b>3</b></p> <p><b>Indagación constante</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto es más bien una actividad de hacer o construir cosas que un proceso extendido de indagación. No existe un proceso para que los estudiantes generen preguntas que guíen la indagación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La indagación es limitada (puede ser breve y ocurrir solo una o dos veces en el proyecto; la búsqueda de información es la tarea principal; no existen preguntas realmente profundas).</li> <li>Los estudiantes generan preguntas, pero mientras algunas pueden ser cubiertas, otras no son usadas para guiar la indagación y, por ende, no afectan el camino que toma el proyecto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La indagación es sostenida a lo largo del tiempo y es rigurosa académicamente (los estudiantes hacen preguntas, buscan e interpretan datos, desarrollan y evalúan soluciones o construyen evidencia para obtener respuestas y generar nuevas preguntas).</li> <li>A lo largo del proyecto, la indagación está conducida por preguntas generadas por parte de los estudiantes que son fundamentales para el desarrollo del proyecto.</li> </ul>

	<b>No presenta las características del Proyecto efectivo</b>	<b>Necesita más desarrollo</b>	<b>Incluye características del proyecto efectivo</b>
<p><b>4</b></p> <p><b>Autenticidad</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto se asemeja a un trabajo en clases tradicional; carece de tareas, herramientas y contexto del mundo real. No genera un impacto real en el mundo ni habla de los intereses personales de los estudiantes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto presenta algunas características auténticas, pero estas pueden ser limitadas o ser lejanas a las necesidades del contexto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto presenta un contexto auténtico y tareas y herramientas del mundo real; cumple estándares de calidad, genera un impacto en el mundo y habla sobre las preocupaciones, intereses o identidades personales de los estudiantes.</li> </ul>
<p><b>5</b></p> <p><b>Voz y elección del estudiante</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No se les da oportunidad a los estudiantes para que expresen su voz y tomen decisiones que afecten el contenido o proceso del proyecto; el proyecto está dirigido por el docente.</li> <li>O bien, se espera que los estudiantes trabajen de manera demasiado independiente sin una guía adecuada por parte del docente y/o que trabajen de esta manera antes de que sean capaces de hacerlo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se les dan pocas oportunidades a los estudiantes para que expresen su voz y tomen decisiones de mediana importancia (decidir cómo dividir tareas dentro del grupo o qué sitio web usar para investigar).</li> <li>Los estudiantes trabajan, en cierta medida de manera independiente del docente, pero podrían hacer más por sí solos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes tienen oportunidades para expresar su voz y tomar decisiones acerca de los temas importantes (temas a investigar, preguntas, textos y recursos usados, gente con quien trabajar, productos a ser creados, uso del tiempo, organización de las tareas).</li> <li>Los estudiantes tienen oportunidades para tomar responsabilidades significativas y trabajar lo más independientemente del profesor como sea apropiado hacerlo, pero de manera guiada.</li> </ul>
<p><b>6</b></p> <p><b>Reflexión</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes y el docente no participan en conjunto de la reflexión acerca de qué y cómo los estudiantes aprenden acerca del diseño del proyecto y su gestión.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes y el docente participan en conjunto de algún tipo de reflexión acerca del proyecto y luego de la culminación del mismo, pero no de forma regular o en profundidad.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes y el docente participan en conjunto de una reflexión profunda y comprensiva tanto durante el proyecto como después de su culminación. Reflexionan también acerca de cómo aprenden los estudiantes, el diseño del proyecto y su gestión.</li> </ul>
<p><b>7</b></p> <p><b>Crítica y revisión</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes obtienen retroalimentación limitada o irregular acerca de sus productos y el trabajo en progreso y esta retroalimentación es solo por parte de él, no de los pares.</li> <li>No se requiere su utilización o los estudiantes no saben cómo utilizarla para revisar y mejorar su trabajo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se provee a los estudiantes de oportunidades para dar y recibir retroalimentación acerca de la calidad de los productos y del trabajo en progreso, pero este espacio para la retroalimentación puede carecer de estructura o solo existir una vez.</li> <li>Los estudiantes leen o reciben oralmente la retroalimentación acerca de su trabajo, pero no la usan para revisar y mejorar su trabajo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se provee regular y estructuradamente a los estudiantes de oportunidades para dar y recibir retroalimentación acerca de la calidad de los productos y del trabajo en progreso por parte de los pares, los docentes y de otros fuera de la clase, si la ocasión lo amerita.</li> <li>Los estudiantes usan la retroalimentación acerca de su trabajo para revisarlo y mejorarlo.</li> </ul>
<p><b>8</b></p> <p><b>Producto</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes no hacen de su producto algo público que se presente a una audiencia o que se ofrezca a la gente más allá de la clase.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El trabajo de los estudiantes se hace público solo para los compañeros y el docente.</li> <li>Los estudiantes presentan productos pero no se les pide que expliquen cómo trabajaron ni qué aprendieron.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El trabajo de los estudiantes se hace público al presentar, mostrar u ofrecerlo a la gente más allá de la clase.</li> <li>Se les pregunta a los estudiantes que expliquen las razones que justifican sus elecciones, su proceso de indagación, cómo trabajaron, qué aprendieron etc.</li> </ul>

## Rúbrica de Presentación del Trabajo

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p><b>1</b></p> <p><b>Explicación de las ideas e información</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta información, argumentos, ideas o hallazgos de forma concisa y lógica; el argumento no contiene evidencia que lo valide; la audiencia no puede seguir la línea de razonamiento.</li> <li>• La selección de información, desarrollo de ideas y el estilo son inapropiados para el propósito, tarea y audiencia (puede ser demasiada o muy poca información o un enfoque erróneo).</li> <li>• No se refiere a perspectivas o puntos de vista alternativos u opuestos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta información, argumentos, hallazgos y evidencia de una manera que no siempre es clara, concisa y lógica; la línea de razonamiento es a veces difícil de seguir por parte de la audiencia.</li> <li>• Intenta seleccionar información, desarrollar ideas y usar un estilo apropiados para el propósito, tarea y audiencia, que no son por completo exitosos.</li> <li>• Intenta referirse a perspectivas alternativas u opuestas, pero no de forma completa o clara.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta información, argumentos, hallazgos y evidencia en forma clara, concisa y lógica; la línea de razonamiento se puede seguir fácilmente por parte de la audiencia.</li> <li>• Selecciona información, desarrolla ideas y usa un estilo apropiado al propósito, la tarea y la audiencia.</li> <li>• Abarca perspectivas alternativas u opuestas de manera clara y acabada.</li> </ul>
<p><b>2</b></p> <p><b>Organización</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No cumple los requerimientos con respecto a lo que debe ser incluido en la presentación.</li> <li>• No incluye una introducción y/o conclusión.</li> <li>• Usa el tiempo de manera poco adecuada; la totalidad de la presentación o parte de ella es muy corta o muy larga.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cumple la mayoría de los requerimientos respecto de los requerimientos con respecto a lo que debe ser incluido en la presentación.</li> <li>• Una introducción y conclusión, pero no son claras ni interesantes.</li> <li>• Generalmente organiza bien el tiempo, pero puede usar demasiado o muy poco tiempo en un tema, material de apoyo o idea.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cumple todos los requerimientos con respecto a lo que debe ser incluido en la presentación.</li> <li>• Incluye una introducción y conclusión que son claras e interesantes.</li> <li>• Organiza bien el tiempo y no hay ninguna parte de la presentación que sea o muy larga o muy corta.</li> </ul>
<p><b>3</b></p> <p><b>Mirada y lenguaje corporal</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No mira a la audiencia, lee las notas o láminas.</li> <li>• No usa gestos o movimientos.</li> <li>• Carece de pose y confianza (mueve los dedos, se agacha, se ve nervioso).</li> <li>• Usa ropa inapropiada para la ocasión.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mantiene contacto visual con poca frecuencia. Lee las notas o diapositivas la mayor parte del tiempo.</li> <li>• Utiliza algunos gestos o movimientos que no parecen naturales.</li> <li>• Presenta una actitud que demuestra confianza y adecuación a la situación. Solo se observa un poco de inquietud y movimiento nervioso.</li> <li>• Intenta usar una presentación personal adecuada para la ocasión.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mantiene contacto visual con la audiencia la mayor parte del tiempo; solo en algunas ocasiones mira las notas o diapositivas.</li> <li>• Utiliza gestos y movimientos naturales.</li> <li>• Presenta una actitud que demuestra confianza y adecuación a la situación.</li> <li>• Posee una presentación personal acorde a la ocasión.</li> </ul>

	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p><b>4</b></p> <p><b>Voz</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No pronuncia bien o habla demasiado bajo que dificulta la comprensión; frecuentemente usa muletillas (uhh, mmm, entonces, y, como, etc.) no adapta el discurso al contexto y la tarea.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La mayor parte del tiempo habla de manera clara; utiliza una voz lo suficientemente fuerte para que la audiencia pueda escuchar la mayor parte del tiempo, pero puede hablar ocasionalmente de forma monótona.</li> <li>Usa muletillas.</li> <li>Intenta adaptar el discurso al contexto o tarea, pero no es consistente o no tiene éxito en su intento.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Habla de manera clara y a un ritmo adecuado; ni muy rápido ni muy lento. Habla lo suficientemente fuerte para que todos puedan escuchar; cambia el tono y el ritmo para mantener el interés.</li> <li>Rara vez usa muletillas</li> <li>Adapta el discurso al contexto y la tarea.</li> <li>Domina el registro formal cuando su uso es necesario.</li> </ul>
<p><b>5</b></p> <p><b>Elementos de ayuda para la presentación</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No usa elementos de audio, visuales o de medios.</li> <li>Usa solo uno o pocos elementos visuales, de audio o de medios pero estos no añaden valor a la presentación y pueden incluso distraer.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Usa elementos de audio, visuales o de medios, pero estos pueden a veces distraer o no añadir valor a la presentación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Usa elementos de audio, visuales o de medios bien elaborados para fortalecer la comprensión de los hallazgos, el razonamiento y la evidencia y añadir interés.</li> <li>Incorpora de forma adecuada y natural a la presentación los elementos visuales, de audio o de medios.</li> </ul>
<p><b>6</b></p> <p><b>Respuesta a las preguntas de la audiencia</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No responde a las preguntas por parte de la audiencia (se sale del tema o no comprende las preguntas y no busca explicación o clarificación de las mismas)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Responde algunas preguntas de la audiencia, pero no siempre de forma clara o completa.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Responde las preguntas de la audiencia en forma clara y completa.</li> <li>Busca clarificaciones a las preguntas, admite cuando no sabe o explica cómo encontrar la respuesta cuando es incapaz de dar una respuesta.</li> </ul>
<p><b>7</b></p> <p><b>Participante en presentaciones de equipo</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No todos los miembros del grupo participan; solo uno o dos de ellos hablan.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Todos los miembros del equipo participan, pero no en la misma proporción.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Todos los miembros del equipo participan por aproximadamente el mismo período de tiempo.</li> <li>Todos los miembros del equipo son capaces de responder las preguntas sobre el tema como un todo y no solo acerca de su parte de la presentación.</li> </ul>